

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

Н. А. Богородская, Е. М. Киселева

СТАТИСТИКА

Методические указания
к практическим занятиям

Санкт-Петербург
2006

Составители: Богородская Н. А., Киселева Е. М.

Рецензент кандидат экономических наук доцент *Л. Г. Фетисова*

Методические указания к практическим занятиям предназначены для студентов экономических специальностей всех форм обучения.

В работе приведены методические указания к решению задач по темам: относительные показатели, средние, показатели вариации, показатели рядов динамики, индексы.

Издание выпущено под авторской редакцией

Корректор *Т. В. Звертановская*
Верстальщик *Т. М. Каргапольцева*

Сдано в набор 25.10.06. Подписано к печати 30.10.06.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,37.
Уч. -изд. л. 5,37. Тираж 600 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67

© ГУАП, 2006
© Н. А. Богородская, Е. М. Киселева, 2006

ПРЕДИСЛОВИЕ

Статистика изучает с количественной стороны качественное содержание социально-экономических явлений. В методических указаниях к практическим занятиям рассмотрены показатели, изучаемые в теории статистики: относительные показатели, средние показатели, показатели вариации, показатели рядов динамики и индексы.

В первом разделе приведена структура относительных показателей, формулы расчета и примеры решения задач по следующим относительным показателям: динамики, планового задания, выполнения плана, сравнения, сравнения со стандартом, структуры, координации и интенсивности.

Во втором разделе подробно рассмотрены степенные средние показатели (арифметическая, гармоническая, геометрическая, квадратическая) и структурные средние (мода, медиана), основные свойства средней арифметической величины. Особое внимание уделено расчету средних показателей при различной исходной статистической информации.

В разделе, посвященном показателям вариации, приведены показатели: размах вариации, среднее линейное отклонение, среднее квадратическое отклонение, дисперсия количественного признака, свойства дисперсии, дисперсии количественного признака в совокупности, разделенной на группы (групповая, межгрупповая, внутригрупповая, общая), дисперсия качественного альтернативного признака, коэффициент вариации.

В разделе «Показатели рядов динамики» рассмотрены абсолютные показатели: уровни ряда динамики, цепные и базисные абсолютные приросты; относительные показатели: цепные и базисные темпы роста и темпы прироста, абсолютное значение одного процента прироста; средние показатели: средний уровень ряда (в моментных и интервальных рядах, с равными и неравными интервалами), средний абсолютный прирост, средний темп роста, средний темп прироста.

В разделе «Индексы» показаны методика и примеры решения задач по расчету агрегатных и средних индексов, индексов переменного, постоянного (фиксированного) состава и влияния структурных сдвигов.

1. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ

1.1. Методические указания к решению задач по теме «Относительные показатели»

Относительные показатели являются обобщающими величинами, характеризующими относительные размеры социально-экономических явлений. Они позволяют сравнивать одноименные и разноименные величины, анализировать изменение показателей во времени, в пространстве, изучить структуру и соотношение частей явления. На рис. 1.1 приведена классификация относительных показателей.



Рис. 1.1. Классификация относительных показателей

Относительные величины могут быть безразмерными (при сравнении одноименных показателей) или иметь размерность (при сравнении разноименных показателей). Относительные величины показывают во сколько раз сравниваемый показатель больше базисного или какую долю сравниваемый составляет относительно базисного или сколько единиц одного показателя приходится на 100, 1000 и т. д. единиц другого показателя. В зависимости от базы сравнения относительные величины могут быть выражены в:

- коэффициентах (если база сравнения равна 1);
- процентах, % (если база сравнения равна 100);
- промилле, ‰ (если база сравнения равна 1000);
- продецимилле, ‰о (если база сравнения равна 10 000).

Относительная величина динамики — это отношение значения показателя в текущий момент (для моментных величин) или период времени (для интервальных величин) к значению такого же показателя в предшествующий момент (период). Относительные величины динамики рассчитываются:

— с переменной базой сравнения — цепные относительные величины динамики $K_{д}^ц$ (называются цепные темпы роста $T_p^ц$)

$$T_p^ц = K_{д}^ц = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100, \%;$$

— с постоянной базой сравнения — базисные относительные величины динамики $K_{д}^б$ (называются базисные темпы роста $T_p^б$)

$$T_p^б = K_{д}^б = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100, \%,$$

где y_i, y_{i-1}, y_0 — значение показателя (уровень ряда динамики) в i -й, $(i-1)$ -й и начальный момент (период) времени.

Цепные и базисные темпы роста связаны следующим образом:

— произведение цепных темпов роста равно последнему базисному темпу роста

$$\prod_{i=1}^n T_{pi}^ц = T_n^б = \frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \dots \cdot \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_0};$$

— отношение двух базисных темпов роста (последующего к предыдущему) равно соответствующему цепному темпу роста

$$\frac{T_{pi}^б}{T_{pi-1}^б} = T_{pi}^ц = \frac{y_i}{y_0} : \frac{y_{i-1}}{y_0} = \frac{y_i}{y_{i-1}}.$$

Относительная величина плана (планового задания, договорных обязательств) — это отношение планового абсолютного значения показателя в отчетном (текущем) периоде ($A_{пл1}$) к фактическому абсолютному значению этого показателя в базисном периоде ($A_{ф0}$)

$$K_{пл} = \frac{A_{пл1}}{A_{ф0}} \cdot 100, \%$$

Относительная величина выполнения плана (планового задания, договорных обязательств) — это отношение фактического значения показателя к плановому значению этого же показателя в отчетном периоде.

Относительная величина выполнения плана может быть рассчитана на основе абсолютных фактического ($A_{ф1}$) и планового ($A_{пл1}$) показателей в отчетном периоде

$$K_{в.пл} = \frac{A_{ф1}}{A_{пл1}} \cdot 100, \%$$

или с использованием относительных показателей, если база сравнения относительных показателей одинакова

$$K_{в.пл} = \frac{K_{ф}}{K_{пл}} \cdot 100, \%$$

где $K_{ф} = \frac{A_{ф1}}{A_{ф0}} \cdot 100, \%$ — относительная величина фактического значения показателя. Эта величина представляет собой цепную относительную величину динамики ($K_{ф} = K_{д}^ц$).

В том случае, когда плановый показатель задан в виде относительной величины, а фактические в отчетном и базисном периодах — в виде абсолютных величин (табл. 1.1), необходимо привести данные к сопоставимому виду: либо определить абсолютную плановую величину показателя ($A_{пл1}$), либо относительную фактическую величину $K_{ф}$.

Из относительной величины планового задания

$$K_{пл} = \frac{A_{пл1}}{A_{ф0}} \cdot 100, \%$$

определяется абсолютное плановое значение показателя в отчетном периоде

$$A_{пл1} = \frac{K_{пл} A_{ф0}}{100}.$$

Таблица 1.1. Исходная информация для расчета относительной величины выполнения плана

Название показателя	Значение показателя		
	в базисном году	в отчетном году	
		плановое	фактическое
Абсолютный показатель	$A_{\phi 0}$		$A_{\phi 1}$
Относительный показатель, %		$K_{пл}$	

Тогда относительная величина выполнения плана, рассчитанная через абсолютные значения

$$K_{в.пл} = \frac{A_{\phi 1}}{A_{пл1}} = \frac{A_{\phi 1} \cdot 100}{K_{пл} A_{\phi 0}} \cdot 100, \%$$

Для расчета относительной величины выполнения плана через относительные показатели необходимо определить относительную фактическую величину показателя

$$K_{\phi} = \frac{A_{\phi 1}}{A_{\phi 0}} \cdot 100, \%$$

Тогда относительная величина выполнения плана

$$K_{в.пл} = \frac{K_{\phi}}{K_{пл}} \cdot 100, \% = \frac{A_{\phi 1} \cdot 100}{K_{пл} A_{\phi 0}} \cdot 100, \%$$

Если относительная величина выполнения плана равна 100 %, план выполнен, если больше 100 % — план перевыполнен в том случае, когда увеличение показателя улучшает результаты работы (например, прибыль), и план недовыполнен, когда увеличение показателя ухудшает показатели работы (например, себестоимость).

Относительные величины плана, выполнения плана и динамики связаны между собой следующим соотношением

$$K_{пл} K_{в.пл} = K_{\phi} = K_{д} = \frac{A_{пл1}}{A_{\phi 0}} \cdot \frac{A_{\phi 1}}{A_{пл1}} = \frac{A_{\phi 1}}{A_{\phi 0}}$$

Относительная величина сравнения — это отношение значений одноименного показателя двух объектов (территорий) в один и тот же момент или период времени

$$K_{ср} = \frac{A_B}{A_C} \cdot 100, \%$$

где A_B, A_C — абсолютные значения показателя по объектам или территориям B и C .

Относительная величина сравнения со стандартом — это отношение значения показателя какого-либо объекта (территории) к нормативному, стандартному или оптимальному значению

$$K_{\text{ср}} = \frac{A}{A_{\text{н}}} \cdot 100, \%,$$

где $A_{\text{н}}$ — нормативное значение показателя.

Относительная величина структуры — это удельный вес структурной части статистической совокупности (группы) во всей совокупности. Определяется как отношение величины структурной части показателя к величине показателя или как отношение численности группы к численности совокупности

$$K_{\text{стр } i} = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \cdot 100, \%,$$

где A_i — абсолютное значение показателя i -й структурной части или численность i -й структурной группы статистической совокупности; n — число структурных частей (групп) в совокупности.

Сумма удельных весов составляет

$$\sum_{i=1}^n K_{\text{стр } i} = 100 \%.$$

Относительная величина координации — это отношение показателей (численности) одной части совокупности к показателю (численности) другой части совокупности

$$K_{\text{к}} = \frac{A_i}{A_j},$$

где A_i — абсолютное значение показателя (или численность) в i -й группе; A_j — абсолютное значение показателя (или численность) в j -й группе, принятой за базу сравнения.

Относительная величина интенсивности — это отношение абсолютных разноименных показателей, связанных между собой. Эти показатели могут относиться к одной совокупности или характеризовать разные совокупности. Относительная величина интенсивности рассчитывается по формуле

$$K_{и} = \frac{A_B}{C_B},$$

где A_B — абсолютное значение показателя, характеризующее явление B ; C_B — абсолютное значение показателя, характеризующее среду распространения явления B .

1.2. Примеры решения задач по теме «Относительные показатели»

Относительная величина динамики

Задача 1.1

Имеются данные [20, 21, 22] о численности постоянного населения Российской Федерации с 1996 по 2004 гг. (графа 1 табл. 1.2).

Определить относительные величины динамики населения (цепные и базисные темпы роста).

Таблица 1.2. Численность постоянного населения Российской Федерации (на 1 января)

Год	Численность населения, N , млн чел.	Темпы роста, %	
		цепные	базисные
А	1	2	3
1996	147,6	—	100,0
1997	147,1	99,7	99,7
1998	146,7	99,7	99,4
1999	146,3	99,7	99,1
2000	145,6	99,5	98,6
2001	144,8	99,5	98,1
2002	144,0	99,5	97,6
2003	145,0	100,7	98,2
2004	144,2	99,5	97,7
2005	143,5	99,5	97,2
2006	142,8	99,5	96,8

Решение

Относительные показатели динамики населения рассчитываются следующим образом:

— цепные темпы роста

$$T_p^ц = K_d^ц = \frac{N_i}{N_{i-1}} \cdot 100, \%;$$

— базисные темпы роста

$$T_p^б = K_d^б = \frac{N_i}{N_0} \cdot 100, \%,$$

где N_i , N_{i-1} , N_0 — численность населения на 1 января i -го, $(i-1)$ -го и первого года в ряду динамики.

Например, цепной темп роста населения в 2002 г. (по сравнению с 2001 г.)

$$T_{p\ 02/01}^ц = \frac{N_{02}}{N_{01}} \cdot 100 = \frac{144,0}{144,8} \cdot 100 = 99,5 \%;$$

базисный темп роста населения в 2002 г. (по сравнению с 1996 г.)

$$T_{p\ 02/96}^б = \frac{N_{02}}{N_{96}} \cdot 100 = \frac{144,0}{147,6} \cdot 100 = 97,6 \%.$$

Результаты расчетов темпов роста для всех лет приведены в графах 2 и 3 табл. 1.2, из которой видно, что ежегодно снижается численность населения на 0,3–0,5 % и с 1996 г. по 2006 г. численность населения уменьшилась на 3,2 %.

Относительная величина плана (планового задания)

Задача 1.2

Фактический объем выпуска продукции на предприятии в базисном периоде составил 250 млн р. В отчетном периоде планируется объем выпуска продукции 262 млн р. Условие задачи представлено в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Базисная и плановая величина объема выпуска продукции

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя	
		фактическое значение в базисном периоде	плановое значение в отчетном периоде
Объем выпуска продукции, млн р.	Q	250	262

Определить относительную величину плана по объему выпуска продукции.

Решение

Относительная величина плана по объему выпуска продукции рассчитывается по формуле

$$K_{\text{пл}}^Q = \frac{Q_{\text{пл1}}}{Q_{\text{ф0}}} \cdot 100 = \frac{262}{250} \cdot 100 = 104,8 \%$$

Планом в отчетном периоде предусмотрено увеличение объема выпуска продукции на 4,8 %.

Относительная величина выполнения плана

Задача 1.3

В отчетном периоде плановый выпуск продукции составил 262 млн р., фактический выпуск — 270 млн р. (табл. 1.4).

Таблица 1.4. Плановая и фактическая величина объема выпуска продукции

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя	
		плановая	фактическая
Объем выпуска продукции, млн р.		262	270

Определить относительную величину выполнения плана по объему выпуска продукции.

Решение

Относительная величина выполнения плана по объему выпуска продукции определяется следующим образом

$$K_{\text{в.пл}}^Q = \frac{Q_{\text{ф1}}}{Q_{\text{пл1}}} \cdot 100 = \frac{270}{262} \cdot 100 = 103,1 \%$$

План по объему выпуска продукции в отчетном периоде перевыполнен на 3,1 %.

Задача 1.4

В отчетном периоде плановый прирост выработки продукции составил 2 %, фактический прирост — 2,5 % (табл. 1.5).

Определить относительную величину выполнения плана по уровню выработки (производительности труда).

Таблица 1.5. Плановое и фактическое изменение выработки продукции

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя в отчетном периоде	
		плановая	фактическая
Относительное изменение выработки продукции, %	ΔK^V	+2	+2,5

Решение

Для определения относительной величина выполнения плана по уровню выработки продукции необходимо рассчитать выработку. Относительная выработка продукции в отчетном периоде составляет:

— плановая

$$K_{пл1}^V = K_{ф0}^V + \Delta K_{пл1}^V = 100 + 2 = 102 \% ;$$

— фактическая

$$K_{ф1}^V = K_{ф0}^V + \Delta K_{ф1}^V = 100 + 2,5 = 102,5 \% .$$

Относительная величина выполнения плана по уровню выработки рассчитывается следующим образом

$$K_{в.пл}^V = \frac{K_{ф1}^V}{K_{пл1}^V} \cdot 100 = \frac{102,5}{102} \cdot 100 = 100,49 \% .$$

План по выработке продукции в отчетном периоде перевыполнен на 0,49 % .

Задача 1.5

В отчетном периоде плановое снижение себестоимости единицы продукции составило 4 % , фактическое снижение — 3 % (табл. 1.6).

Таблица 1.6. Плановое и фактическое изменение себестоимости продукции

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя в отчетном периоде	
		плановая	фактическая
Относительное изменение себестоимости продукции, %	ΔK^z	-4	-3

Определить относительную величину выполнения плана по уровню себестоимости.

Решение

Относительная себестоимость продукции в отчетном периоде составляет:

— плановая

$$K_{пл1}^z = K_{ф0}^z + \Delta K_{пл1}^z = 100 - 4 = 96 \% ;$$

— фактическая

$$K_{ф1}^z = K_{ф0}^z + \Delta K_{ф1}^z = 100 - 3 = 97 \% .$$

Относительная величина выполнения плана по уровню себестоимости рассчитывается следующим образом

$$K_{в.пл}^z = \frac{K_{ф1}^z}{K_{пл1}^z} \cdot 100 = \frac{97}{96} \cdot 100 = 101,04 \% .$$

План по себестоимости продукции в отчетном периоде **недовыполнен** на **1,04 %**, так как увеличение себестоимости приводит к уменьшению прибыли, рентабельности и др. показателей, т. е. к ухудшению результатов деятельности предприятия.

Задача 1.6

Фактический объем выпуска продукции в базисном периоде составил 250 млн р., в отчетном периоде плановый объем выпуска продукции — 102 %, фактический объем продукции — 270 млн р. (табл. 1.7).

Таблица 1.7. Объем выпуска продукции в базисном и отчетном периодах

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя в базисном периоде	Величина показателя в отчетном периоде	
			плановая	фактическая
Объем выпуска продукции, млн р.	Q	250		270
Относительная величина объема выпуска продукции, %	K^Q		102	

Определить относительную величину выполнения плана по объему выпуска продукции.

Решение

Для определения относительной величины выполнения плана по объему выпуска продукции необходимо привести исходные данные к

одинаковой размерности. Для этого рассчитывается в отчетном периоде один из следующих показателей:

— относительный фактический объем выпуска продукции

$$K_{\phi 1}^Q = \frac{Q_{\phi 1}}{Q_{\phi 0}} \cdot 100 = \frac{270}{250} \cdot 100 = 108 \% ;$$

— абсолютный плановый объем выпуска продукции из формулы

$$K_{\text{пл}1}^Q = \frac{Q_{\text{пл}1}}{Q_{\phi 0}} \cdot 100, \% ; \quad Q_{\text{пл}1} = \frac{K_{\text{пл}1}^Q Q_{\phi 0}}{100} = \frac{102 \cdot 250}{100} = 255 \text{ млн р.}$$

Результаты расчета приведены в табл. 1.8.

Таблица 1.8. Результаты приведения объема выпуска продукции к одинаковой размерности

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя в базисном периоде	Величина показателя в отчетном периоде	
			плановая	фактическая
Объем выпуска продукции, млн р.	Q	250	255	270
Относительная величина объема выпуска продукции, %	K^Q		102	108

Относительная величина выполнения плана по объему выпуска продукции определяется с использованием

— относительных показателей

$$K_{\text{в.пл}}^Q = \frac{K_{\phi 1}^Q}{K_{\text{пл}1}^Q} \cdot 100 = \frac{108}{102} \cdot 100 = 105,88 \% ;$$

— абсолютных показателей

$$K_{\text{в.пл}}^Q = \frac{Q_{\phi 1}}{Q_{\text{пл}1}} \cdot 100 = \frac{270}{250} \cdot 100 = 105,88 \% .$$

План по объему выпуска продукции в отчетном периоде перевыполнен на 5,88 % .

Задача 1.7

Планом в отчетном периоде предусмотрено снижение себестоимости единицы продукции на 0,5 тыс. р. при уровне себестоимости

8 тыс. р., фактическая себестоимость в отчетном периоде составила 7,4 тыс. р. (табл. 1.9).

Таблица 1.9. Исходные показатели себестоимости продукции

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя в базисном периоде	Величина показателя в отчетном периоде	
			плановая	фактическая
Себестоимости продукции, тыс. р.	z	8,0		7,4
Абсолютное изменение себестоимости продукции, тыс. р.	Δz		-0,5	

Определить относительную величину:

планового задания в отчетном периоде по себестоимости — $K_{пл}^z$;

выполнения плана по уровню себестоимости — $K_{в.пл}^z$;

выполнения плана по снижению себестоимости — $K_{в.пл}^{\Delta z}$;

фактической себестоимости (динамики себестоимости) — K_d^z .

Показать взаимосвязь рассчитанных относительных величин.

Решение

1. Рассчитываются абсолютные показатели, которые используются при определении относительных величин:

— плановая величина себестоимости

$$z_{пл} = z_{ф0} + \Delta z_{пл} = 8,0 - 0,5 = 7,5 \text{ тыс. р.};$$

— фактическая величина изменения себестоимости

$$\Delta z_{ф} = z_{ф1} - z_{ф0} = 7,4 - 8,0 = -0,6 \text{ тыс. р.}$$

Результаты расчета сведены в табл. 1.10.

Таблица 1.10. Исходные и расчетные показатели себестоимости продукции

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя в базисном периоде	Величина показателя в отчетном периоде	
			плановая	фактическая
Себестоимости продукции, тыс. р.	z	8,0	7,5	7,4
Абсолютное изменение себестоимости продукции, тыс. р.	Δz		-0,5	-0,6

2. Относительная величина

— планового задания в отчетном периоде по себестоимости

$$K_{\text{пл}}^z = \frac{z_{\text{пл}}}{z_{\text{ф0}}} \cdot 100 = \frac{7,5}{8,0} \cdot 100 = 93,75 \%,$$

планом предусмотрено снижение себестоимости единицы продукции в отчетном периоде по сравнению с базисным на 6,25 % (93,75 – 100 = – 6,25 %), что соответствует снижению себестоимости на 0,5 тыс. р.;

— выполнения плана по уровню себестоимости

$$K_{\text{в.пл}}^z = \frac{z_{\text{ф1}}}{z_{\text{пл}}} \cdot 100 = \frac{7,4}{7,5} \cdot 100 = 98,67 \%,$$

план по уровню себестоимости единицы продукции **перевыполнен** на 1,33 % (98,67 – 100 = – 1,33 %);

— выполнения плана по снижению себестоимости

$$K_{\text{в.пл}}^{\Delta z} = \frac{\Delta z_{\text{ф1}}}{\Delta z_{\text{пл}}} \cdot 100 = \frac{-0,6}{-0,5} \cdot 100 = 120 \%,$$

план по снижению себестоимости единицы продукции **перевыполнен** на 20 % (120 – 100 = 20 %);

— фактической себестоимости (динамики себестоимости)

$$K_{\text{д}}^z = \frac{z_{\text{ф1}}}{z_{\text{ф0}}} \cdot 100 = \frac{7,4}{8,0} \cdot 100 = 92,5 \%,$$

в отчетном периоде по сравнению с базисным фактическая себестоимость снизилась на 7,5 % (92,5 – 100 = – 7,5 %), что соответствует снижению фактической себестоимости на 0,6 тыс. р.

3. Производство относительных величин плана и выполнения плана равно относительной величине динамики

$$K_{\text{пл}}^z \cdot K_{\text{в.пл}}^z = K_{\text{д}}^z = 0,9375 \cdot 0,9867 = 0,925.$$

Задача 1.8

Объем выпуска продукции в базисном периоде ($Q_{\text{ф0}}$) составил 250 млн р., планом предусмотрен объем выпуска ($Q_{\text{пл}}$) в отчетном периоде 260 млн р., относительная величина динамики ($K_{\text{д}}^Q$) объема выпуска равна 1,06.

Определить относительную величину выполнения плана по объему выпуска продукции.

Решение

Относительная величина выполнения плана по объему продукции может быть рассчитана из взаимосвязи относительных показателей

$$K_{\text{пл}}^Q K_{\text{в.пл}}^Q = K_{\text{д}}^Q; \text{ тогда } K_{\text{в.пл}}^Q = \frac{K_{\text{д}}^Q}{K_{\text{пл}}^Q}.$$

Относительная величина плана объема продукции

$$K_{\text{пл}}^Q = \frac{Q_{\text{пл}}}{Q_{\text{ф0}}} = \frac{260}{250} = 1,04;$$

относительная величина выполнения плана по объему продукции

$$K_{\text{в.пл}}^Q = \frac{K_{\text{д}}^Q}{K_{\text{пл}}^Q} = \frac{1,06}{1,04} = 1,019 \text{ или } 101,9 \%$$

Относительная величина сравнения

Задача 1.9

Имеются данные [23] о средней номинальной (начисленной) заработной плате и среднем размере начисленных пенсий в июне 2004 г. в Северо-Западном Федеральном округе и в России (графы 1, 2 табл. 1.11).

Определить относительные величины сравнения:

среднего размера назначенных пенсий и средней номинальной заработной платы в субъектах РФ;

средней номинальной заработной платы в субъектах РФ. В качестве базы сравнения принять среднюю заработную плату в РФ и в г. Санкт-Петербург.

Решение

1. При определении относительных величин сравнения размера назначенных пенсий и номинальной заработной платы сравниваются одноименные показатели (пенсии и заработная плата являются частью доходов населения) по различным совокупностям (пенсионеры и работающие). Расчет производится по формуле

$$K_{\text{срi}} = \frac{\Pi_i}{3\Pi_i} \cdot 100, \%$$

где Π_i , $3\Pi_i$ — средний размер назначенных пенсий и средняя номинальная заработная платы в i -м субъекте РФ.

Таблица 1.11. Заработная плата и пенсии в июне 2004 года в Северо-Западном Федеральном округе и в России

Территория	Средняя начисленная заработная плата в расчете на одного работника, р.	Средний размер назначенных пенсий., р.	Отношение среднего размера назначенных пенсий к средней заработной плате, %
А	1	2	3
Россия	7003,1	1890,7	27,0
Республика Карелия	7204,9	2280,7	31,7
Республика Коми	9695,3	2376,4	24,5
Архангельская область	7998,6	2319,4	29,0
Ненецкий автономный округ	18130,91	2802,1	15,5
Вологодская область	7038,7	1967,3	27,9
Калининградская область	6563,3	1852,6	28,2
Ленинградская область	6861,7	1922,6	28,0
Мурманская область	10637,91	2557,2	24,0
Новгородская область	5813,2	1860,7	32,0
Псковская область	4828,3	1825,1	37,8
г. Санкт-Петербург	8429,0	2107,1	25,0

Например, в г. СПб относительная величина сравнения пенсий и заработной платы в июне 2004 г составила

$$K_{\text{ср СПб}} = \frac{\text{П}_{\text{СПб}}}{\text{ЗП}_{\text{СПб}}} \cdot 100 = \frac{2107,1}{8429,0} \cdot 100 = 25,0 \%$$

Результаты расчетов по всем субъектам РФ и России приведены в графе 3 табл. 1.11. Из таблицы видно, что в Северо-Западном Федеральном округе по четырем субъектам РФ (Республика Коми, Ненецкий автономный округ, Мурманская область и г. Санкт-Петербург) относительная величина сравнения пенсий и заработной платы ниже, чем в целом по России.

2. При сравнении средней номинальной заработной платы по субъектам РФ (территории) в качестве базы сравнения выбрана средняя заработная плата в России и в г. **Санкт-Петербург**. Например, в Республике Карелия средняя номинальная заработная плата по сравнению

Таблица 1.12. Номинальная заработная плата в июне 2004 года в Северо-Западном Федеральном округе

Территория	Средняя начисленная заработная плата в расчете на одного работника, р.	Отношение средней заработной платы в субъекте РФ к средней номинальной заработной плате, %	
		в России	в г. СПб
Россия	7003,1	100,0	83,1
Республика Карелия	7204,9	102,9	85,5
Республика Коми	9695,3	138,4	115,01
Архангельская область	7998,6	114,2	94,9
Ненецкий автономный округ	18130,91	258,9	215,11
Вологодская область	7038,7	100,5	83,5
Калининградская область	6563,3	1852,6	28,2
Ленинградская область	6861,7	1922,6	28,0
Мурманская область	10637,91	2557,2	24,0
Новгородская область	5813,2	1860,7	32,0
Псковская область	4828,3	1825,1	37,8
г. Санкт-Петербург	8429,0	2107,1	25,0

— с уровнем заработной платы в России

$$K_{\text{ср РК/Р}} = \frac{\text{ЗП}_{\text{РК}}}{\text{ЗП}_{\text{Р}}} \cdot 100 = \frac{7204,9}{7003,1} \cdot 100 = 102,9 \%$$

— с уровнем заработной платы в г. Санкт-Петербург

$$K_{\text{ср РК/СПб}} = \frac{\text{ЗП}_{\text{РК}}}{\text{ЗП}_{\text{СПб}}} \cdot 100 = \frac{7204,9}{8429,0} \cdot 100 = 85,5 \%$$

Результаты расчетов для всех субъектов РФ приведены в табл. 1.12. Из таблицы видно, что в Калининградской, Ленинградской, Новгородской и Псковской областях средняя заработная плата ниже, чем в России (особенно в Псковской области ниже на 31,1 %). По трем субъектам РФ (Республика Коми, Ненецкий автономный округ и Мурманская область) средняя заработная плата превышает уровень заработной платы в г. Санкт-Петербург.

Относительная величина сравнения со стандартом

Задача 1.10

Имеются данные [23] о величине прожиточного минимума за II квартал 2004 г. и номинальных доходов на душу населения в июне 2004 г. в Северо-Западном Федеральном округе (графы 1, 2 табл. 1.13).

Определить отношение номинальных доходов к величине прожиточного минимума (относительную величину сравнения со стандартом).

Решение

Относительная величина сравнения со стандартом рассчитывается по формуле

$$K_{\text{ср}} = \frac{A}{A_{\text{н}}} \cdot 100, \%,$$

где $A_{\text{н}}$ — нормативное значение показателя.

Таблица 1.13. Величина прожиточного минимума за II квартал 2004 г. и номинальных доходов на душу населения в июне 2004 г. в Северо-Западном Федеральном округе

Территория	Величина прожиточного минимума., р./мес.	Номинальные доходы на душу населения, р./мес.	Отношение номинальных доходов к величине прожиточного минимума, %
А	1	2	3
Россия	2363	6077,3	257,2
Республика Карелия	2674	5896,8	220,5
Республика Коми	3173	9420,9	296,9
Архангельская область	2665	6141,9	230,5
Ненецкий автономный округ	4544	9804,4	215,8
Вологодская область	2210	5400,4	244,4
Калининградская область	2624	4792,9	182,7
Ленинградская область	2399	3722,4	155,2
Мурманская область	3665	7956,1	217,1
Новгородская область	2338	3990,6	170,7
Псковская область	1954	4087,9	209,2
г. Санкт-Петербург	2777	8648,5	311,4

Например по Республике Карелия отношение средней номинальной заработной платы к величине прожиточного минимума

$$K_{\text{срРК}} = \frac{\text{ПМ}_{\text{РК}}}{\text{ЗП}_{\text{РК}}} \cdot 100 = \frac{5896,8}{2674,0} \cdot 100 = 220,5 \%,$$

где $\text{ПМ}_{\text{РК}}$, $\text{ЗП}_{\text{РК}}$ — прожиточный минимум и номинальная заработная плата в Республике Карелия.

Результаты расчетов относительных величин сравнения со стандартом приведены в табл. 1.13.

В Ленинградской области в июне 2004 г. средняя заработная плата была больше прожиточного минимума на 55,2%.

Относительная величина структуры

Задача 1.11

Имеются данные [21] о расходах на конечное потребление домашних хозяйств в 2003 г. по 10-процентным группам населения (табл. 1.14).

Определить структуру расходов домашних хозяйств на конечное потребление в 10-процентных группах населения.

Решение

Относительная величина структуры (удельный вес) определяется по формуле

$$K_{\text{стр}i} = \frac{A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \cdot 100, \%,$$

где A_i — величина показателя i -й структурной части признака; n — число структурных частей признака.

Например, для наименее обеспеченной первой 10-процентной группы удельный вес

— расходов на питание

$$d_1 = \frac{P_{\text{п}}}{P} \cdot 100 = \frac{542,9}{860,3} \cdot 100 = 63,1 \%,$$

где $P = P_{\text{п}} + P_{\text{н.т}} + P_{\text{а}} + P_{\text{у}} + P_{\text{л}}$;

— расходов на покупку непродовольственных товаров

$$d_2 = \frac{P_{\text{н.т}}}{P} \cdot 100 = \frac{148,8}{860,3} \cdot 100 = 17,3 \%;$$

Таблица 1.14. Расходы на конечное потребление домашних хозяйств в 2003 г. (по материалам выборочного обследования бюджетов домашних хозяйств)

Домашние хозяйства по 10-процентным группам населения	Расходы на конечное потребление в среднем на одного члена домашнего хозяйства в месяц, Р, р.	в том числе				стоимость предоставленных работодателем льгот в натуральном выражении, Р _л , р.
		стоимость питания, Р _п , р.	расходы			
			на покупку непродовольственных товаров, Р _{н.т} , р.	на покупку алкогольных напитков, Р _а , р.	на оплату услуг, Р _у , р.	
первая (с наименьшими доходами)	860,3	542,9	148,8	10,3	156,6	1,7
вторая	1258,8	764,1	246,7	18,9	225,3	3,8
третья	1558,1	922,4	327,2	24,9	278,9	4,7
четвертая	1863,8	1066,1	430,5	31,7	328,0	7,5
пятая	2229,6	1221,8	561,9	40,1	390,2	15,6
шестая	2726,6	1349,7	826,2	49,1	474,4	27,2
седьмая	3283,1	1510,2	1060,4	69,0	623,8	19,7
восьмая	3933,8	1636,5	1455,5	90,5	735,6	15,7
девятая	4853,7	1922,1	1888,1	106,8	907,6	29,1
десятая (с наибольшими доходами)	7325,0	2439,2	3354,8	161,2	1325,8	44,0

— расходов на покупку алкогольных напитков

$$d_3 = \frac{P_a}{P} \cdot 100 = \frac{10,3}{860,3} \cdot 100 = 1,2 \%;$$

— расходов на оплату услуг

$$d_4 = \frac{P_y}{P} \cdot 100 = \frac{156,6}{860,3} \cdot 100 = 18,2 \%;$$

— стоимости предоставленных работодателем льгот в натуральном выражении

$$d_5 = \frac{P_l}{P} \cdot 100 = \frac{1,7}{860,3} \cdot 100 = 0,2 \%.$$

Таблица 1.15. Структура расходов на конечное потребление домашних хозяйств в 2003 г.

Домашние хозяйства по 10-процентным группам населения	Расходы на конечное потребление в среднем на одного члена домашнего хозяйства в месяц, р.	Удельный вес расходов, %				
		стоимость питания d_1	расходы			стоимость представленных работодателям льгот в натуральном выражении
			на покупку непродовольственных товаров d_2	на покупку алкогольных напитков d_3	на оплату услуг d_4	
первая (с наименьшими доходами)	860,3	63,1	17,3	1,2	18,2	0,2
вторая	1258,8	60,7	19,6	1,5	17,9	0,3
третья	1558,1	59,2	21,0	1,6	17,9	0,3
четвертая	1863,8	57,2	23,1	1,7	17,6	0,4
пятая	2229,6	54,8	25,2	1,8	17,5	0,7
шестая	2726,6	49,5	30,3	1,8	17,4	1,0
седьмая	3283,1	46,0	32,3	2,1	19,0	0,6
восьмая	3933,8	41,6	37,0	2,3	18,7	0,4
девятая	4853,7	39,6	38,9	2,2	18,7	0,6
десятая (с наибольшими доходами)	7325,0	33,3	45,8	2,2	18,1	0,6

Результаты расчетов приведены в табл. 1.15.

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 63,1 + 17,3 + 1,2 + 18,2 + 0,2 = 100 \% .$$

Задача 1.12

Имеются данные [21, 22] о численности населения в Российской Федерации с 1970 по 2005 гг. (табл. 1.16).

Определить структуру населения (удельный вес населения в возрасте моложе трудоспособного, трудоспособного и старше трудоспособного).

Таблица 1.16. Численность населения в РФ (млн чел.)

Год	Численность населения ¹	в том числе численность населения в возрасте		
		Моложе трудоспособного	трудоспособном	старше трудоспособного
1970	129,9	37,1	72,8	20,0
1979	137,4	32,0	83,0	22,4
1989	147,0	36,0	83,8	27,2
2002	145,2	26,4	89,0	29,8
2003	145,0	26,1	89,2	29,7
2004	144,2	25,0	89,9	29,3
2005	143,5	24,1	90,2	29,2

¹ Данные приведены за 1970 г. — по переписи на 15 января, за 1979 г. — по переписи на 17 января, за 1989 г. — по переписи на 12 января, за 2002 г. — по переписи на 9 октября, за 2003-2005 гг. — оценка на 1 января соответствующего года.

Решение

Удельный вес населения в i -м году определяется следующим образом:

— в возрасте моложе трудоспособного

$$d_{м.т. i} = \frac{N_{м.т. i}}{N_i} \cdot 100, \%$$

— в трудоспособном возрасте

$$d_{т.в. i} = \frac{N_{т.в. i}}{N_i} \cdot 100, \%$$

— в возрасте старше трудоспособного

$$d_{с. i} = \frac{N_{с. i}}{N_i} \cdot 100, \%$$

где $N_{м.т. i}$, $N_{т.в. i}$, $N_{с. i}$ — численность населения моложе трудоспособного, трудоспособного и старше трудоспособного возраста в i -м году; N_i — численность населения в i -м году.

Например, в 1970 г. удельный вес населения

— моложе трудоспособного возраста

$$d_{м.т.} = \frac{37,1}{129,9} \cdot 100 = 28,6 \%$$

Таблица 1.17. Структура населения в РФ

Год	Удельный вес населения в возрасте, %		
	моложе трудоспособного	трудоспособном	старше трудоспособного
1970	28,6	56,0	15,4
1979	23,3	60,4	16,3
1989	24,5	57,0	18,5
2002	18,2	61,3	20,5
2003	18,0	61,5	20,5
2004	17,3	62,4	20,3
2005	16,8	62,9	20,3

— трудоспособного возраста

$$d_{т.в} = \frac{72,8}{129,9} \cdot 100 = 56,0 \%;$$

— старше трудоспособного возраста

$$d_c = \frac{20,0}{129,9} \cdot 100 = 15,4 \%.$$

Результаты расчетов для всех лет приведены в табл. 1.17.

Относительная величина координации

Задача 1.13

Имеются данные [21, 22] о численности городского и сельского населения в Российской Федерации (графы 1, 2 табл. 1.18).

Определить численность городского населения, приходящегося на 100 человек сельского населения (относительную величину координации).

Решение

Относительная величина координации сельского и городского населения рассчитывается по формуле

$$K_{\kappa} = \frac{N_{гi}}{N_{сi}} \cdot 100, \%,$$

где $N_{гi}$ — численность городского и сельского населения в i -м году.

Например, в 2004 г. численность городского населения, приходящегося 100 человек сельского населения

Таблица 1.18. Численность городского и сельского населения¹ в РФ

Год	Численность населения, млн чел.		Численность городского населения, приходящегося на 100 человек сельского населения
	городского	сельского	
1897 ²	9,9	57,6	17
1914 ²	15,7	74,2	21
1917	15,5	75,5	21
1926	16,4	76,3	22
1939	36,3	72,1	50
1959	61,1	56,1	109
1970	80,6	49,3	164
1979	94,9	42,5	223
1989	108,0	39,0	277
2002	106,4	38,8	274
2003	106,3	38,7	275
2004	105,8	38,4	276
2005	104,7	38,8	270
2006	104,1	38,7	269

¹ Данные приведены за 1897 г. — по первой всеобщей переписи населения на 9 февраля, за 1926 г. — по переписи на 17 декабря, за 1939 и 1979 гг. — по переписи на 17 января, за 1959 и 1970 гг. — по переписи на 15 января, за 1989 г. — по переписи на 12 января, за 2002 г. — по переписи на 9 октября, за 2003–2005 гг. — оценка на 1 января соответствующего года; 1897, 1926, 1939 гг. — наличное население, за последующие годы — постоянное население.

² Данные в современных границах РФ.

$$K_k = \frac{105,8}{38,4} \cdot 100 = 276 \text{ \%}.$$

Относительные величины координации приведены в графе 3 табл. 1.18.

Из табл. 1.17 видно, что начиная с 1989 г. соотношение численности городского и сельского населения не изменяется и на каждые 100 человек, проживающих в сельской местности, приходится в среднем 270 человек городского населения.

Задача 1.14

Имеются данные на 1 января 2004 г. [22] о численности населения по основным возрастным группам в Северо-Западном Федеральном округе (графы 1, 2, 3 табл. 1.19).

Таблица 1.19. Основные возрастные группы населения в Северо-Западном Федеральном округе на 1 января 2004 года

Территория	Численность населения в возрасте, тыс. чел.			Численность на 1000 человек населения трудоспособного возраста	
	трудоспособном	моложе трудоспособного	старше трудоспособного	детей и подростков	лиц старше трудоспособного возраста
А	1	2	3	4	5
Республика Карелия	453,6	121,2	133,9	267	295
Республика Коми	675,8	189,1	140,8	280	208
Архангельская область	842,1	234,6	241,2	279	287
Ненецкий автономный округ	26,8	110,2	1 14,8	380	179
Вологодская область	778,5	216,0	261,2	277	336
Калининградская область	609,7	155,7	184,2	255	302
Ленинградская область	1037,41	249,0	373,5	240	360
Мурманская область	609,0	151,3	119,7	249	196
Новгородская область	408,9	108,5	165,2	265	404
Псковская область	445,6	115,9	186,2	260	418

Определить численность населения моложе трудоспособного возраста (детей и подростков) и старше трудоспособного возраста на 1000 человек населения трудоспособного возраста (относительную величину координации).

Решение

Относительная величина координации основных возрастных групп населения рассчитывается в i -м субъекте РФ по формулам:

— численность детей и подростков на 1000 человек населения в трудоспособном возрасте

$$K_{к.м i} = \frac{N_{м i}}{N_{т i}} \cdot 1000, \text{‰};$$

— численность лиц старше трудоспособного возраста на 1000 человек населения в трудоспособном возрасте

$$K_{к.с i} = \frac{N_{с i}}{N_{т i}} \cdot 1000, \text{‰},$$

где $N_{м i}$, $N_{с i}$, $N_{т i}$ — численность населения моложе, старше трудоспособного возраста и в трудоспособном возрасте в i -м субъекте РФ.

Например, по г. Санкт-Петербургу относительные величины координации определяются следующим образом:

— численность детей и подростков на 1000 человек населения в трудоспособном возрасте

$$K_{к.м СПб} = \frac{N_{м СПб}}{N_{т СПб}} \cdot 1000 = \frac{615,0}{2922,4} \cdot 1000 = 210 \text{‰};$$

— численность лиц старше трудоспособного возраста на 1000 человек населения в трудоспособном возрасте

$$K_{к.с СПб} = \frac{N_{с СПб}}{N_{т СПб}} \cdot 1000 = \frac{1086,7}{2922,4} \cdot 1000 = 372 \text{‰}.$$

Результаты расчета относительных величин координации для всех субъектов РФ в Северо-Западном Федеральном округе приведены в графах 4 и 5 табл. 1.19.

Задача 1.15

Имеются данные [21] о расходах федерального бюджета Российской Федерации в 2003 г. (графа 1 табл. 1.20).

Определить относительную величину координации расходов статей бюджета. За базу сравнения принять расходы на государственное и местное самоуправление.

Решение

Относительная величина координации i -м статьи расхода бюджета рассчитывается по формуле

$$K_{к i} = \frac{P_i}{P_6},$$

где P_i — расходы i -й статьи бюджета; P_6 — расходы статьи бюджета, принятой за базу сравнения.

Таблица 1.20. Расходы федерального бюджета Российской Федерации в 2003 г.

Наименование расходов	Величина расходов, млрд р.	Относительная величина координации
А	1	2
Расходы — всего из них:	2358,61	35,36
1) на государственное и местное самоуправление	166,7	1,00
2) на международную деятельность	131,5	0,47
3) на национальную оборону	355,7	5,33
4) на правоохранительную деятельность и обеспечение безопасности государства	247,9	3,72
5) на промышленность, энергетику и строительство	168,7	1,03
6) на транспорт, связь и информатику	16,5	0,11
7) на дорожное хозяйство	44,7	0,67
8) на охрану окружающей среды и природных ресурсов, гидрометеорологию, картографию и геодезию	11,4	0,17
9) на сельское хозяйство и рыболовство	31,7	0,48
10) на социально-культурные мероприятия	304,71	4,57
11) на обслуживание государственного и муниципального долга	220,91	3,31
12) на финансовую помощь другим бюджетам бюджетной системы	796,41	11,941
13) расходы целевых бюджетных фондов	14,3	0,21

Например, для второй статьи расходов бюджета (отношение расходов на международную деятельность к величине расходов на государственное и местное самоуправление)

$$K_{к 2} = \frac{P_2}{P_6} = \frac{31,5}{66,7} = 0,47$$

означает, что на каждый один млрд р. расходов на государственное и местное самоуправление приходится 0,47 млрд р. расходов на международную деятельность.

Результаты расчета относительных величин координации для всех статей расходов и для суммарных расходов приведены в графе 2 табл. 1.20.

Относительная величина интенсивности

Задача 1.16

Имеются данные [23] о численности населения, числе родившихся и умерших в I полугодии 2004 г. в России и в Северо-Западном Федеральном округе (графы 1, 2, 3 табл. 1.21).

Определить относительные величины интенсивности (коэффициенты рождаемости и смертности).

Решение

Коэффициенты рождаемости и смертности (число родившихся, число умерших на 1000 человек населения) в *i*-м субъекте РФ рассчитываются по формулам

Таблица 1.21. Естественное движение населения в I полугодии 2004 г. в Северо-Западном Федеральном округе

Территория	Численность населения, тыс. чел.	Число родившихся, тыс. чел.	Число умерших, тыс. чел.	На 1000 человек населения	
				число родившихся	число умерших
А	1	2	3	4	5
Россия	144168,0	1513,76	2364,36	10,5	16,4
Республика Карелия	708,7	7,44	13,54	10,5	19,1
Республика Коми	1005,7	11,67	15,29	11,6	15,2
Архангельская область	1317,9	14,37	23,21	10,9	17,6
Ненецкий автономный округ	41,8	0,61	0,51	14,6	12,2
Вологодская область	1255,6	13,56	24,36	10,8	19,4
Калининградская область	949,6	9,02	18,14	19,5	19,1
Ленинградская область	1659,9	13,94	34,03	18,4	20,5
Мурманская область	880,0	9,06	11,71	10,3	13,3
Новгородская область	682,6	6,42	15,97	19,4	23,4
Псковская область	747,6	6,73	18,98	19,0	25,4
г. Санкт-Петербург	4624,1	40,69	75,37	18,8	16,3

$$K_{pi} = \frac{N_{pi}}{N_i} \cdot 1000, \text{‰}; K_{cmi} = \frac{N_{yi}}{N_i} \cdot 1000, \text{‰},$$

где N_{pi} , N_{yi} — число родившихся и умерших в i -м субъекте РФ;
 N_i — численность населения в i -м субъекте РФ.

Например, в г. Санкт-Петербурге

— коэффициент рождаемости

$$K_{p \text{ СПб}} = \frac{N_{p \text{ СПб}}}{N_{\text{СПб}}} \cdot 1000 = \frac{40,67}{4624,1} \cdot 1000 = 8,8 \text{‰};$$

— коэффициент смертности

$$K_{cm \text{ СПб}} = \frac{N_{y \text{ СПб}}}{N_{\text{СПб}}} \cdot 1000 = \frac{75,37}{4624,1} \cdot 1000 = 16,3 \text{‰}.$$

Результаты расчета рождаемости и смертности для всех субъектов РФ Северо-Западного Федерального округа приведены в графах 4, 5 табл. 1.21.

Задача 1.17

В 2005 г. расходы федерального бюджета Российской Федерации на социально-культурные мероприятия составили 2009,3 млрд р., численность населения — 143,5 млн чел. [22].

Определить относительную величину интенсивности (средние расходы федерального бюджета на социально-культурные мероприятия на душу населения).

Решение

Средние расходы федерального бюджета на социально-культурные мероприятия на душу населения (относительная величина интенсивности) рассчитываются следующим образом

$$K_{c.k} = \frac{P_{c.k}}{N} = \frac{2009,3 \cdot 10^9}{143,5 \cdot 10^6} = 14002 \text{ р./чел.},$$

где $P_{c.k}$ — расходы федерального бюджета на социально-культурные мероприятия; N_i — численность населения в РФ.

Комплексная задача по теме «Относительные показатели»

Задача 1.18

Имеются данные по промышленному предприятию в базисном и отчетном периодах об объеме товарной продукции, среднесписочной численности персонала и фонде заработной платы (табл. 1.22).

Таблица 1.22. Показатели деятельности предприятия в базисном и отчетном периодах

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя	
		в базисном периоде	в отчетном периоде
1. Объем товарной продукции, млн р.	Q	400	420
2. Среднесписочная численность персонала, чел.	N	800	810
3. Фонд заработной платы, млн р.	Φ	82	90

Определить все относительные величины.

Решение

Показатели, приведенные в табл. 1.22, связаны между собой, поэтому можно определить относительные показатели

— интенсивности: среднюю выработку продукции на одного работника за период (V) и среднюю заработную плату одного работника за период ($ЗП$)

$$V = \frac{Q}{N}; \quad ЗП = \frac{\Phi}{N};$$

— структуры (удельный вес заработной платы в объеме продукции)

$$d_{з.п} = \frac{\Phi}{Q}.$$

Эти показатели используются при анализе хозяйственной деятельности предприятия.

Также могут быть рассчитаны обратные показатели

$$\frac{1}{V} = \frac{N}{Q}; \quad \frac{1}{ЗП} = \frac{N}{\Phi}; \quad \frac{1}{d_{з.п}} = \frac{Q}{\Phi},$$

но они применяются редко при решении частных вопросов, поэтому в данной задаче не рассчитываются.

Например, в базисном периоде

— средняя выработка продукции на одного работника

$$V_б = \frac{Q_б}{N_б} = \frac{400}{800} = 0,5 \text{ млн р./чел.} = 500 \text{ тыс. р./чел.};$$

— средняя заработная плата одного работника

$$ЗП_{\phi} = \frac{\Phi_{\phi}}{N_{\phi}} = \frac{82}{800} = 0,1025 \text{ млн р./чел.} = 102,5 \text{ тыс. р./чел.};$$

— удельный вес заработной платы в объеме продукции

$$d_{з.п. \phi} = \frac{\Phi_{\phi}}{Q_{\phi}} = \frac{82}{400} = 0,205 \text{ (20,5\%)}.$$

Относительные показатели динамики (темпы роста) рассчитываются

$$T_p = \frac{A_{\phi}}{A_{\phi}} \cdot 100, \%,$$

где A_{ϕ} , A_{ϕ} — значение показателя (абсолютное или относительное) в отчетном и базисном периодах.

Например, темп роста объема продукции

$$T_{pQ} = \frac{Q_{\phi}}{Q_{\phi}} \cdot 100 = \frac{420}{400} \cdot 100 = 105 \%.$$

Таблица 1.23. Относительные показатели деятельности предприятия

Название показателя	Обозначение показателя	Величина показателя		Темп роста, %
		в базисном периоде	в отчетном периоде	
1. Объем товарной продукции, млн р.	Q	400	420	105,0
2. Среднесписочная численность персонала, чел.	N	800	810	101,3
3. Фонд заработной платы, млн р.	Φ	82	90	109,8
4. Средняя выработка продукции на одного работника за период, тыс. р./чел.	V	500,0	518,5	103,7
5. Средняя заработная плата одного работника за период, тыс. р./чел.	ЗП	102,5	111,1	108,4
6. Удельный вес заработной платы в объеме продукции (зарплатоемкость продукции)	$d_{з.п.}$	0,205	0,214	104,4

Результаты расчета относительных показателей приведены в табл. 1.23.

Темпы роста исходных и расчетных показателей (см. табл. 1.23) характеризуют улучшение всех показателей, но если определить коэффициент опережения темпами роста производительности труда (выработки) темпов роста заработной платы,

$$K_{\text{оп}} = \frac{T_{pV}}{T_{pЗП}} = \frac{103,7}{108,4} = 0,96,$$

то он указывает на неудовлетворительную деятельность предприятия (рост заработной платы опережает рост производительности труда).

2. СРЕДНИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

2.1. Методические указания к решению задач по теме «Средние показатели»

Средняя величина является обобщенной количественной характеристикой признака в статистической совокупности. Вычисление средней величины должно осуществляться с учетом экономического содержания изучаемого показателя.

Средние величины делятся на два класса: *степенные средние* (средняя арифметическая, гармоническая, геометрическая, квадратическая и др.); *структурные средние* (мода, медиана). На рис. 2.1 приведена структура средних показателей.

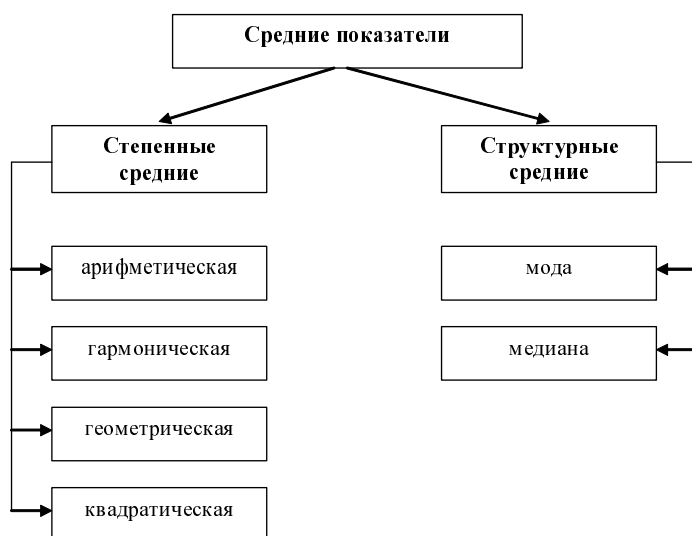


Рис. 2.1. Структура средних показателей

Степенные средние величины

Средняя арифметическая рассчитывается следующим образом:
— средняя арифметическая простая (невзвешенная)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum x}{n};$$

— средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum x f}{\sum f};$$

где x — значения (варианты) признака; n — число вариантов (число наблюдений), из которых рассчитывается средняя; f — статистический вес (число повторений значения признака).

Если известны произведения $x_i f_i = w_i$, то среднюю величину можно вычислить по формуле *средней агрегатной*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^i w_i}{\sum_{i=1}^i f_i} = \frac{\sum w}{\sum f}.$$

Средняя гармоническая вычисляется из обратных значений признака:

— средняя гармоническая простая (невзвешенная)

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}};$$

— средняя гармоническая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} w_i} = \frac{\sum w}{\sum \frac{1}{x} w},$$

где $w_i = x_i f_i$.

Средняя геометрическая невзвешенная рассчитывается по формулам:

— средняя геометрическая простая (невзвешенная)

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{\prod x};$$

— средняя геометрическая взвешенная

$$\bar{x} = \sqrt[f]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \dots \cdot x_n^{f_n}} = \sqrt[f]{\prod_{i=1}^n x_i^{f_i}} = \sqrt[f]{\prod x^f}.$$

Средняя геометрическая применяется, например, при вычислении средних темпов роста (см. п. 4 «Показатели рядов динамики»).

Средняя квадратическая рассчитывается по формулам:

— средняя квадратическая простая (невзвешенная)

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}};$$

— средняя квадратическая взвешенная

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}.$$

Формула средней квадратической применяется для расчета среднего квадратического отклонения (см. п. 3 «Показатели вариации»).

Выбор формулы расчета средней величины зависит от задачи исследования, содержания изучаемого явления и исходной информации.

При определении средних величин в интервальном вариационном ряду в случае открытых крайних интервалов необходимо определить нижнюю границу первого и верхнюю границу последнего интервалов. Для этого используются величины других, закрытых интервалов: величина интервала первой группы условно принимается равной величине интервала последующей, а величина интервала последней группы — величине интервала предыдущей. В интервальном ряду распределений необходимо варианты признака выразить одним числом (дискретным). За такое дискретное число принимается середина интервала.

Основные свойства средней арифметической величины

1. Произведение средней величины и суммы частот равно сумме произведений значений (вариант) признака на частоты

$$\bar{x} \sum f = \frac{\sum xf}{\sum f} \sum f = \sum xf.$$

2. Если из каждой варианты вычесть какое-либо произвольное число, то новая средняя уменьшается на то же число

$$\overline{(x - A)} = \frac{\sum(x - A)f}{\sum f} = \bar{x} - A.$$

Тогда средняя величина исходных значений

$$\bar{x} = \frac{\sum(x - A)f}{\sum f} + A.$$

3. Если к каждой варианту прибавить какое-либо произвольное число, то новая средняя увеличится на то же число

$$\overline{(x + A)} = \frac{\sum(x + A)f}{\sum f} = \bar{x} + A.$$

Тогда средняя величина исходных значений

$$\bar{x} = \frac{\sum(x + A)f}{\sum f} - A.$$

4. Если каждую варианту разделить на какое-либо произвольное число, то средняя арифметическая уменьшится во столько же раз

$$\overline{\left(\frac{x}{h}\right)} = \frac{\sum \frac{x}{h} f}{\sum f} = \frac{1}{h} \bar{x}.$$

Тогда средняя величина исходных значений

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x}{h} f}{\sum f} \cdot h.$$

5. Если каждую варианту умножить на какое-либо произвольное число, то средняя арифметическая увеличится во столько же раз

$$\overline{(xh)} = \frac{\sum(xh)f}{\sum f} = \bar{x} \cdot h.$$

Тогда средняя величина исходных значений

$$\bar{x} = \frac{\sum(xh)f}{\sum f} : h.$$

6. Если все частоты умножить (разделить) на какое-либо число, то средняя не изменяется

$$\frac{\sum x(kf)}{\sum kf} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \bar{x}.$$

7. Если все варианты имеют одинаковую частоту ($f_1 = f_2 = \dots = f_n = k$), то средняя арифметическая взвешенная равна средней арифметической простой

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i k}{\sum k} = \frac{k \sum x_i}{nk} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

8. Сумма отклонений, как от простой, так и от взвешенной средней арифметической равна нулю

$$\sum (x - \bar{x}) = \sum x - n\bar{x} = \sum x - n \frac{\sum x}{n} = 0;$$

$$\sum (x - \bar{x})f = \sum xf - \bar{x} \sum f = \sum xf - \frac{\sum xf}{\sum f} \sum f = 0.$$

Использование свойств 2 и 4 позволяет значительно упростить расчеты и вычислить арифметическую среднюю в сгруппированном ряду распределения по формуле

$$\bar{x} = m_1 h + A,$$

где m_1 - момент первого порядка

$$m_1 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right) f}{\sum f}.$$

Метод упрощенного расчета средней величины называется методом отсчета от условного нуля или способом моментов.

Степенные средние используются для расчета хронологических, многомерных и других средних показателей.

Средняя хронологическая является характеристикой ряда динамики и рассчитывается для интервальных и моментных рядов с равноотстоящими и неравноотстоящими уровнями (см. п. 4 «Показатели рядов динамики»).

Средняя многомерная величина рассчитывается для каждой i -й единицы статистической совокупности по формуле

$$\bar{P}_i = \frac{\sum_{j=1}^k P_{ij}}{k},$$

где k — количество признаков, характеризующих единицу статистической совокупности; P_{ij} — нормированное значение j -го признака i -й единицы совокупности, определяется следующим образом

$$P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\bar{x}_j},$$

где x_{ij} — значение j -го признака i -й единицы статистической совокупности; \bar{x}_j — среднее значение j -го признака в статистической совокупности.

Структурные средние показатели

Средние показатели являются обобщающими характеристиками варьирующего признака. Вспомогательными описательными характеристиками вариационного ряда являются структурные средние показатели: мода и медиана.

Модой называется величина признака (вариант), которая чаще всего встречается в статистической совокупности. В вариационном ряду это будет значение показателя, имеющее наибольшую частоту.

Для интервального ряда распределения мода рассчитывается по следующей формуле

$$M_o = x_{M_o} + i_{M_o} \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})},$$

где x_{M_o} — нижняя граница модального интервала; i_{M_o} — величина модального интервала; $f_{M_o}, f_{M_o-1}, f_{M_o+1}$ — частота модального, предшествующего модальному и последующего за модальным интервала.

Медианой называется варианта, которая находится в середине вариационного ряда по частоте. Медиана делит ряд пополам, по обе стороны от нее находится одинаковое количество единиц совокупности. Медиана показывает количественную границу варьирующего признака, которую достигла половина членов совокупности.

В интервальном ряду распределения медиана рассчитывается следующим образом

$$M_e = x_{M_e} + i_{M_e} \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{M_e-1}}{f_{M_e}},$$

где x_{Mo} — нижняя граница медианного интервала; i_{Mo} — величина медианного интервала; S_{Me-1} — частота, накопленная до медианного интервала; f_{Me} — частота медианного интервала.

При анализе структуры рядов распределения кроме структурных средних величин используются квартили, квантили, децили и процентиля, формулы расчета которых аналогичны формуле расчета медианы.

2.2. Примеры решения задач по теме «Средние показатели»

Средняя арифметическая величина

Задача 2.1

Имеются данные о средней заработной плате и числе рабочих различной квалификации (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Заработная плата и число рабочих

Квалификация рабочего	Разряд рабочего	Средняя заработная плата, ЗП, тыс. р./мес.	Число рабочих, N_i , чел.
1. Низкая	1; 2	6,0	1
		6,5	1
		6,8	1
2. Средняя	3; 4	8,2	2
		8,8	2
		9,0	2
3. Высокая	5; 6	10,51	3
		12,01	5
		12,61	2
	Итого		191

Определить среднюю заработную плату рабочих каждой квалификации и всех рабочих.

Решение

1. Средняя заработная плата j -й квалификации рабочих (групповая средняя величина) рассчитывается следующим образом

$$\overline{\text{ЗП}}_j = \frac{\Phi \text{ЗП}_j}{N_j} = \frac{\sum \text{ЗП}_{ij}}{N_j},$$

где $\PhiЗП_j$ — фонд заработной платы рабочих j -й квалификации; N_j — число рабочих j -й квалификации.

2. Средняя заработная плата рабочих низкой (первой) квалификации может быть рассчитана по формуле простой средней, так как значения заработной платы этой категории рабочих не повторяются

$$\overline{ЗП}_1 = \frac{\PhiЗП_1}{N_1} = \frac{\sum ЗП_{i1}}{N_1} = \frac{6,0 + 6,5 + 6,8}{3} = \frac{19,3}{3} = 6,433 \text{ тыс. р./чел.}$$

3. Для рабочих средней квалификации средняя заработная плата рассчитывается по формуле средней взвешенной

$$\begin{aligned} \overline{ЗП}_2 &= \frac{\PhiЗП_2}{N_2} = \frac{\sum ЗП_{2i} \cdot N_{2i}}{\sum N_{2i}} = \frac{8,2 \cdot 2 + 8,8 \cdot 2 + 9,0 \cdot 2}{2 + 2 + 2} = \\ &= \frac{52}{6} = 8,667 \text{ тыс. р./чел.,} \end{aligned}$$

или по формуле простой средней, так как статистический вес (число рабочих) одинаковый для различных значений заработной платы

$$\overline{ЗП}_2 = \frac{\sum ЗП_{2i}}{k} = \frac{8,2 + 8,8 + 9,0}{3} = \frac{26}{3} = 8,667 \text{ тыс. р./чел.}$$

4. Средняя заработная платы рабочих высокой квалификации

$$\begin{aligned} \overline{ЗП}_3 &= \frac{\PhiЗП_3}{N_3} = \frac{\sum ЗП_{3i} \cdot N_{3i}}{\sum N_{3i}} = \frac{10,5 \cdot 3 + 12,0 \cdot 5 + 12,6 \cdot 2}{3 + 5 + 2} = \\ &= \frac{116,7}{10} = 11,67 \text{ тыс. р./чел.} \end{aligned}$$

5. Средняя заработная плата всех рабочих (общая средняя величина) по формуле

— средней арифметической взвешенной с использованием всех значений заработной платы

$$\begin{aligned} \overline{ЗП} &= \frac{\PhiЗП}{N} = \frac{\sum ЗП_i}{\sum N_i} = \\ &= \frac{6 + 6,5 + 6,8 + 8,2 \cdot 2 + 8,8 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 10,5 \cdot 3 + 12,0 \cdot 5 + 12,6 \cdot 2}{1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 5 + 2} = \\ &= \frac{188}{19} = 9,895 \text{ тыс. р./чел.,} \end{aligned}$$

— средней арифметической взвешенной с использованием средних значений заработной платы рабочих по каждой квалификационной группе

$$\begin{aligned}\overline{\text{ЗП}} &= \frac{\text{ФЗП}}{N} = \frac{\sum \overline{\text{ЗП}}_j \cdot N_j}{\sum N_j} = \frac{6,433 \cdot 3 + 8,667 \cdot 6 + 11,67 \cdot 10}{1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 5 + 2} = \\ &= \frac{19,299 + 52,002 + 116,7}{19} = \frac{188,001}{19} = 8,895 \text{ тыс. р./чел.}\end{aligned}$$

— средней агрегатной с использованием величины фонда заработной платы и численности рабочих по каждой квалификационной группе

$$\overline{\text{ЗП}} = \frac{\text{ФЗП}}{N} = \frac{\sum \text{ФЗП}_j}{\sum N_j} = \frac{19,3 + 52 + 116,7}{19} = \frac{188}{19} = 8,895 \text{ тыс. р./чел.}$$

Задача 2.2

Имеются данные о возрасте работников предприятия в виде интервального ряда распределения работников по возрасту (графы 1, 2 или 1, 3 табл. 2.2).

Определить средний возраст работника предприятия.

Решение

Для расчета среднего возраста работника в интервальном ряду распределения необходимо определить середину интервала (графа 4 табл. 1.25). Средний возраст работника может быть рассчитан с использованием в качестве статистических весов

— численности работников (графа 5 табл. 2.2)

Таблица 2.2. Распределение рабочих по возрасту

Номер группы работников	Возраст рабочих, лет	Число рабочих, N_i , чел.	Удельный вес рабочих, d_i , %	Средний возраст рабочих в группе, V_i , лет	$V_i N_i$	$V_i d_i$
А	1	2	3	4	5	6
1	20–25	200	10	22,5	14500	1225,0
2	25–30	900	45	27,5	24750	1237,5
3	30–35	800	40	32,5	26000	1300,0
4	35–40	100	5	37,5	13750	1187,5
<i>Итого</i>		2000	100		59000	2950,0

$$\bar{B} = \frac{\sum B_i N_i}{\sum N_i} = \frac{59000}{2000} = 29,5 \text{ лет};$$

— удельного веса работников каждой группы в общей численности работников (графа 6 табл. 2.2)

$$\bar{B} = \frac{\sum B_i d_i}{\sum d_i} = \frac{2950}{100} = 29,5 \text{ лет.}$$

Задача 2.3

Имеются данные о численности высоко- и низкоквалифицированных рабочих и средней месячной заработной плате по двум предприятиям (табл. 2.3).

Определить среднюю месячную заработную плату рабочих на каждом предприятии.

Решение

Средняя заработная плата одного рабочего в месяц рассчитывается по формуле средней арифметической взвешенной и составляет:

— по первому предприятию

$$\overline{ЗП}_1 = \frac{\sum ФЗП_1}{\sum N_1} = \frac{\sum ЗП_i \cdot N_i}{\sum N_i} = \frac{10,5 \cdot 1000 + 6,5 \cdot 3000}{4000} = 7,5 \text{ тыс. р.}$$

Таблица 2.3. Численность рабочих и средняя месячная заработная плата

Группы рабочих	Предприятие 1			Предприятие 2		
	Число рабочих, чел.	Удельный вес рабочих, %	Средняя заработная плата, р./мес.	Число рабочих, чел.	Удельный вес рабочих, %	Средняя заработная плата, р./мес.
Высококвалифицированные	1000	25	10,5	2000	50	10,5
Низкоквалифицированные	3000	75	6,5	2000	50	6,5
<i>Итого</i>	4000	100	—	4000	100	—

— по второму предприятию

$$\overline{\text{ЗП}}_2 = \frac{\sum \text{ФЗП}_2}{\sum N_2} = \frac{\sum \text{ЗП}_2 \cdot N_2}{\sum N_2} = \frac{10,5 \cdot 2000 + 6,5 \cdot 2000}{4000} = 8,5 \text{ тыс. р.}$$

Средний уровень заработной платы по каждой категории рабочих на двух предприятиях одинаковый (10,5 и 6,5 тыс. р.). Различие в средней месячной заработной плате рабочих по предприятиям (7,5 и 8,5 тыс. р.) объясняется разной структурой рабочих. На втором предприятии по сравнению с первым выше удельный вес рабочих с заработной платой 10,5 тыс. р.

Расчет средней арифметической величины способом моментов

Задача 2.4

Имеются данные о распределении предприятий по численности персонала (графы 1 и 2 табл. 2.4).

Определить среднюю численность персонала предприятия в интервальном ряду распределения с открытыми интервалами способом моментов.

Решение

1. При определении средней величины в интервальном ряду с открытыми интервалами прежде всего необходимо закрыть интервалы. В табл. 2.4 задан ряд распределения предприятий с равными интервалами (1000 чел.). Нижняя граница первого интервала равна

Таблица 2.4. *Распределение предприятий по численности персонала*

Численность персонала (открытые интервалы), чел.	Число предприятий, f_i	Численность персонала (закрытые интервалы), чел.	Середина интервала, x_i , чел.	$x_i - A = x_i - 6500$	$\frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 6500}{1000}$	$\left(\frac{x_i - A}{h}\right) f_i$
1	2	3	4	5	6	7
До 5000	20	4000–5000	4500	–2000	–2	40
5000–6000	40	5000–6000	5500	–1000	–1	40
6000–7000	80	6000–7000	6500	0	0	0
7000–8000	50	7000–8000	7500	1000	1	50
Свыше 8000	10	8000–9000	8500	2000	2	20
<i>Итого</i>	200	–	–	–	–	10

4000 чел. (5000 – 1000), верхняя граница последнего интервала - 9000 чел. (8000 + 1000). Средняя численность персонала в каждой группе предприятий приведена в графе 4 табл. 2.4.

2. При использовании способа моментов для расчета средней величины из каждого значения средней численности персонала вычитается постоянная величина $A = 6500$, имеющая наибольшую частоту, и полученные значения делятся на величину интервала группировок $h = 1000$ (графы 5 и 6 табл. 2.4).

3. Среднее значение новой случайной величины (момент первого порядка) определяется следующим образом (графа 7 табл. 2.4)

$$m_1 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right) f}{\sum f} = \frac{-10}{200} = -0,05.$$

4. Средняя численность персонала предприятия

$$\bar{x} = m_1 h + A = -0,05 \cdot 1000 + 6500 = 6450 \text{ чел.}$$

Средняя гармоническая величина

Задача 2.5

Имеются данные об удельном весе бракованной продукции (табл. 2.5). Потери от брака (стоимость бракованной продукции) одинаковы по всем видам продукции.

Определить средний удельный вес бракованной продукции.

Решение

1. Средний удельный вес бракованной продукции рассчитывается по формуле (исходное соотношение средней)

$$\bar{d} = \frac{\sum Q_{\text{бп}i}}{\sum Q_i},$$

Таблица 2.5. Удельный вес бракованной продукции

Вид продукции	Удельный вес бракованной продукции, d_i , %
А	2,0
Б	1,0
В	2,5
Г	4,0

где $Q_{\text{бpi}}$ — стоимость бракованной продукции i -го вида; Q_i — стоимость изготовленной продукции i -го вида.

2. Стоимость изготовленной продукции i -го вида может быть определена из удельного веса бракованной продукции

$$d_i = \frac{Q_{\text{бpi}}}{Q_i}, \text{ тогда } Q_i = \frac{Q_{\text{бpi}}}{d_i}.$$

3. Средний удельный вес бракованной продукции

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \frac{\sum_{i=1}^n Q_{\text{бpi}}}{\sum_{i=1}^n Q_i} = \frac{\sum Q_{\text{бpi}}}{\sum \frac{1}{d_i} Q_{\text{бpi}}} = \frac{4Q_{\text{бп}}}{Q_{\text{бп}} \sum \frac{1}{d_i}} = \frac{4}{\sum \frac{1}{d_i}} = \\ &= \frac{4}{\frac{1}{0,02} + \frac{1}{0,01} + \frac{1}{0,025} + \frac{1}{0,04}} = \frac{4}{215} = 0,0186 \text{ (1,86\%)}. \end{aligned}$$

Задача 2.6

Имеются данные по трем предприятиям о суммарных затратах на весь выпуск продукции и затратах на рубль произведенной продукции (табл. 2.6).

Определить по трем предприятиям средние затраты на рубль товарной продукции.

Решение

1. Средние затраты на рубль произведенной продукции определяются по формуле

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sum_{i=1}^n Q_i},$$

Таблица 2.6. Затраты на производство продукции

Номер предприятия	Затраты на производство продукции, Z_i , млн р.	Затраты на 1 рубль произведенной продукции, Z_i , р./р.
1	400	0,75
2	200	0,80
3	360	0,82
Итого	960	—

где n — число предприятий; Q_i — стоимость изготовленной продукции на i -м предприятии.

2. Стоимость изготовленной продукции на i -м предприятии может быть определена из затрат на рубль товарной продукции

$$z_i = \frac{Z_i}{Q_i}, \text{ тогда } Q_i = \frac{Z_i}{z_i}.$$

3. Средние затраты на рубль товарной продукции

$$\bar{z} = \frac{\sum Z_i}{\sum Q_i} = \frac{\sum Z_i}{\sum \frac{1}{z_i} Z_i} = \frac{960}{\frac{400}{0,75} + \frac{200}{0,8} + \frac{360}{0,82}} = \frac{960}{1222,35} = 0,785 \text{ р./р.}$$

Задача 2.7

Имеются данные о средних процентных ставках и доходах коммерческих банков (табл. 2.7).

Определить среднюю процентную ставку по трем коммерческим банкам.

Решение

1. Исходное соотношение средней процентной ставки

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{\sum_{i=1}^n k_i},$$

где n — число банков; k_i - сумма кредитов, выданных банком.

2. Из формулы процентной ставки в i -м коммерческом банке можно определить сумму кредитов, выданных банком

$$c_i = \frac{D_i}{k_i}; \quad k_i = \frac{D_i}{c_i}.$$

Таблица 2.7. Процентные ставки и доходы банков

Номер банка	Средняя процентная ставка банка C_i , %	Доход банка D_i , тыс. р.
1	15	600
2	20	400
3	12	360
Итого		1360

3. Средняя процентная ставка определяется по формуле средней гармонической взвешенной

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} D_i} = \frac{\sum D_i}{\frac{600}{0,15} + \frac{400}{0,2} + \frac{360}{0,12}} = \frac{1360}{9000} = 0,151 \text{ (15,1\%)}$$

Задача 2.8

Имеются данные об экспортной продукции предприятия (табл. 2.8).

Таблица 2.8. Процентные ставки и доходы банков

Вид продукции	Доля экспортной продукции, d_i , %	Стоимость экспортной продукции, $Q_{эi}$, млн р.
А	40	120
Б	30	150
В	10	80
<i>Итого</i>	–	350

Определить среднюю долю экспортной продукции.

Решение

1. Исходное соотношение средней доли экспортной продукции

$$\bar{d} = \frac{\sum Q_{эi}}{\sum Q_i}$$

где Q_i - стоимость изготовленной продукции i -го вида.

2. Из формулы удельного веса экспортной продукции i -го вида можно определить стоимость изготовленной продукции

$$d_i = \frac{Q_{эi}}{Q_i}; \quad Q_i = \frac{Q_{эi}}{d_i}$$

3. Средний удельный вес экспортной продукции определяется по формуле средней гармонической взвешенной

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{эi}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} Q_{эi}} = \frac{\sum Q_{эi}}{\frac{120}{0,4} + \frac{150}{0,3} + \frac{80}{0,1}} = \frac{350}{1600} = 0,219 \text{ (21,9\%)}$$

Средняя многомерная величина

Задача 2.9

Имеются данные о величине трех показателей по четырем предприятиям (графы 1, 2, 3 табл. 2.9).

Определить среднюю многомерную величину для каждого предприятия.

Решение

1. Средняя многомерная величина рассчитывается по формуле

$$\bar{P}_i = \frac{\sum_{j=1}^k P_{ij}}{k},$$

где k — количество признаков, характеризующих единицу статистической совокупности; P_{ij} — нормированное значение j -го признака i -й единицы совокупности.

2. Для расчета нормированного значения j -го признака i -го предприятия

$$P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\bar{x}_j}$$

необходимо определить среднее значение j -го признака в статистической совокупности (\bar{x}_j). Средние значения признаков по четырем предприятиям определяются по формуле средней арифметической простой. Результаты расчета средних получаются с погрешностью, так как для точного расчета средних должны быть известны абсо-

Таблица 2.9. Средние многомерные показатели

Номер предприятия, i	Относительный показатель, x_{ij}			Нормированное значение показателя, p_{ij}			Сумма нормированных значений показателей	Многомерная средняя величина,
	фондоотдача, x_{i1} , р./р.	затраты на рубль продукции, x_{i2} , р./р.	удельный вес экспортной продукции, x_{i3} , %	фондоотдача, p_{i1}	затраты на рубль продукции, p_{i2}	удельный вес экспортной продукции, p_{i3}		
А	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,4	0,80	10	1,2	1,0	0,50	2,70	0,90
2	1,6	0,72	30	0,8	0,9	1,50	3,20	1,07
3	2,2	0,88	15	1,1	1,1	0,75	2,95	0,98
4	1,8	0,80	25	0,9	1,0	1,25	3,15	1,05

лютные значения показателей, на основе которых рассчитаны относительные показатели.

Например,

— средняя фондоотдача на всех предприятиях

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{i1}}{n} = \frac{2,4 + 1,6 + 2,2 + 1,8}{4} = 2,0 \text{ р./р.};$$

— нормированное значение фондоотдачи на первом предприятии

$$P_{11} = \frac{x_{11}}{\bar{x}_1} = \frac{2,4}{2} = 1,2 \text{ р./р.};$$

— средняя многомерная величина на первом предприятии

$$\bar{P}_1 = \frac{\sum_{j=1}^k P_{1j}}{k} = \frac{1,2 + 1 + 0,5}{3} = \frac{2,7}{3} = 0,9.$$

Результаты расчета нормированных значений и средних многомерных величин для всех предприятий приведены в графах 4–8 табл. 2.9.

Структурные средние показатели

Задача 2.10

Имеются данные о распределении коммерческих банков по величине уставного капитала банков (графы А, 1 табл. 2.10).

Определить среднюю величину, моду и медиану уставного фонда по совокупности банков.

Решение

1. Для расчета средней величины уставного фонда определяются закрытые интервалы и середины интервалов (графы 2, 3 табл. 2.10).

Средняя величина уставного фонда одного банка по всей совокупности банков

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{0,25 \cdot 14 + 0,75 \cdot 18 + 1,5 \cdot 38 + 3,5 \cdot 66 + 7,5 \cdot 44 + 12,5 \cdot 20}{200} = \\ &= \frac{879}{200} = 4,395 \text{ млн р.} \end{aligned}$$

Таблица 2.10. Капитал коммерческих банков

Интервалы группы банков по величине уставного фонда, тыс. р.	Число банков f_i	Закрытые интервалы группы банков по величине уставного фонда, млн р.	Середина интервала x_i , млн р.	Сумма накопленных (кумулятивных) частот S_i
А	1	2	3	4
До 500	14	110–500	0,25	114
1500–1000	18	1500–1000	0,75	132
1000–2000	38	1000–2000	1,50	170
2000–5000	66	2000–5000	3,50	136
15000–10000	44	15000–10000	7,50	180
Свыше 10000	20	10000–15000	12,501	200
<i>Итого</i>	200	100	–	–

2. Модальным интервалом по размеру уставного фонда является интервал 2–5 млн р., так как наибольшее число банков (66 банков) имеют уставной фонд, находящийся в этом интервале.

Мода рассчитывается по следующей формуле

$$\begin{aligned}
 M_o &= x_{M_o} + i_{M_o} \frac{f_{M_o} - f_{M_o-1}}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})} = \\
 &= 2 + 3 \cdot \frac{66 - 38}{(66 - 38) + (66 - 44)} = 3,68 \text{ млн р.},
 \end{aligned}$$

где x_{M_o} — нижняя граница модального интервала; i_{M_o} — величина модального интервала; $f_{M_o}, f_{M_o-1}, f_{M_o+1}$ — частота модального, предшествующего модальному и последующего за модальным интервала.

Наиболее часто встречающаяся величина уставного фонда — 3,68 млн р.

3. Для расчета медианы определяются накопленные частоты (графа 5 табл. 2.10). Медианным является интервал, на который приходится половина банков, т. е. интервал 2–5 млн р.

Медиана рассчитывается по формуле

$$M_e = x_{M_e} + i_{M_e} \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{M_e-1}}{f_{M_e}} = 2 + 3 \cdot \frac{200 - 70}{66} = 3,36 \text{ млн р.},$$

где x_{Me} — нижняя граница медианного интервала; i_{Me} — величина медианного интервала; S_{Me-1} — частота, накопленная до медианного интервала.

Половина банков имеют уставной фонд до 3,36 млн р.

Задача 2.11

Имеются данные [21] о распределении населения по величине среднедушевых денежных доходов в 2003 г. (графы 1, 2 табл. 2.11).

Определить среднедушевой, модальный и медианный месячные доходы населения.

Решение

1. Среднедушевой месячный денежный доход населения равен (графа 5 табл. 2.11)

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i d_{iN}}{\sum_{i=1}^n d_{iN}} = \frac{438,3}{100} = 4,383 \text{ тыс. р.}$$

Модальный доход находится в интервале (7–9) тыс. р. (в интервале с наибольшей частотой, равной 21,2 %) и рассчитывается следующим образом

Таблица 2.11. Среднедушевые денежные доходы населения России

Среднедушевой денежный доход в месяц, тыс. р.	Удельный вес населения в группе d_{iN} , %	Закрытые интервалы тыс. р.	Середина интервала D_i , р.	$D_i \cdot d_{iN}$	Сумма накопленных частот S_i
1	2	3	4	5	6
До 1,0	13,4	0,5–1,0	0,75	12,55	13,4
1,0–1,5	16,6	1,0–1,5	1,25	18,25	10,0
1,5–2,0	18,6	1,5–2,0	1,75	15,05	18,6
2,0–3,0	17,9	2,0–3,0	2,50	44,75	36,5
3,0–4,0	15,2	3,0–4,0	3,50	53,20	51,7
4,0–5,0	11,8	4,0–5,0	4,50	53,10	63,5
5,0–7,0	15,3	5,0–7,0	6,00	91,80	78,8
Свыше 7,0	21,2	7,0–9,0	8,00	169,601	100,01
<i>Итого</i>	100,01	–	–	438,31	

$$\begin{aligned}
 Mo &= x_{Mo} + i_{Mo} \frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})} = \\
 &= 7 + 2 \cdot \frac{21,2 - 15,3}{(21,2 - 15,3) + (21,2 - 0)} = 7,406 \text{ тыс. р.}
 \end{aligned}$$

Для определения медианного дохода рассчитываются кумулятивные (накопленные) частоты (графа 6 табл. 2.11). Медиана находится в интервале (3–4) тыс. р., на который приходится половина частот. Медианный доход равен

$$Me = x_{Me} + i_{Me} \frac{\frac{\sum f}{2} - S_{Me-1}}{f_{Me}} = 3 + 1 \cdot \frac{\frac{100}{2} - 36,5}{15,2} = 3,888 \text{ тыс. р.}$$

Половина населения имеет месячный доход менее 3888 р.

3. ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ

3.1. Методические указания к решению задач по теме «Показатели вариации»

Для измерения степени варьирования (колеблемости) признака служит вариация, показателями которой являются: размах вариации, среднее линейное отклонение, среднее квадратическое отклонение, средний квадрат отклонений (дисперсия), коэффициент вариации.

Размах вариации

Размах вариации (R) характеризует пределы вариации (изменения) индивидуальных значений (или вариантов) признака (x) в статистической совокупности

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

где x_{\max} , x_{\min} — наибольшее и наименьшее значение признака.

Среднее линейное отклонение

Среднее линейное отклонение вычисляется по формулам средней арифметической:

— простой (невзвешенной)

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n},$$

где x_i — i -е значение признака x ; \bar{x} — средняя величина признака x ; f_i — статистический вес i -го значения признака; n — число членов совокупности;

— взвешенной

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum f_i}.$$

Среднее квадратическое отклонение

Среднее квадратическое отклонение рассчитывается по формулам:

— невзвешенной

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}};$$

— взвешенной

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}}.$$

Дисперсия количественного признака

Дисперсия количественного признака определяется по формулам средней арифметической:

— невзвешенной

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n};$$

— взвешенной

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}.$$

Дисперсия может быть рассчитана следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - 2\bar{x} \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} + (\bar{x})^2 = \\ &= \overline{x^2} - 2(\bar{x})^2 + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2,\end{aligned}$$

где $\overline{x^2}$ — средний квадрат значений признака; $(\bar{x})^2$ — квадрат средней величины признака.

Свойства дисперсии количественного признака

1. При уменьшении или увеличении весов (частот) варьирующего признака в K раз дисперсия не изменяется

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i K}{\sum f_i K} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}.$$

2. При уменьшении или увеличении каждого значения признака на одну и ту же постоянную величину A дисперсия не изменяется

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum [(x_i - A) - \bar{x}_A]^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum (x_i - A - \bar{x} + A)^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \sigma^2,$$

где $\bar{x}_A = \bar{x} - A$ — среднее значение признака $(x - A)$.

3. При уменьшении или увеличении каждого значения признака в одинаковое число K раз дисперсия уменьшается или увеличивается в K^2 раз, а среднее квадратическое отклонение — в K раз

$$\sigma_K^2 = \frac{\sum (x_i K - \bar{x}_K)^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum (x_i K - \bar{x} K)^2 f_i}{\sum f_i} = K^2 \sigma^2,$$

где $\bar{x}_K = \bar{x} K$ — среднее значение признака xK .

4. Дисперсия признака относительно произвольной величины A всегда больше дисперсии относительно средней арифметической на квадрат разности между средней и произвольной величиной

$$\sigma_A^2 = \sigma^2 + (\bar{x} - A)^2.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \frac{\sum (x_i - A)^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - 2A \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} + A^2 = \overline{x^2} - 2A\bar{x} + A^2 = \\ &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 + (\bar{x})^2 - 2A\bar{x} + A^2 = \sigma^2 + (\bar{x} - A)^2. \end{aligned}$$

Дисперсия относительно средней величины

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 - (\bar{x} - A)^2 = \frac{\sum (x_i - A)^2 f_i}{\sum f_i} - (\bar{x} - A)^2.$$

При $A = 0$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Вычисление дисперсии способом моментов

Метод упрощенного расчета дисперсии осуществляется по формуле

$$\sigma^2 = h^2(m_2 - m_1^2)$$

и называется способом моментов.

Показатели m_1, m_2 представляют собой моменты первого и второго порядка и рассчитываются следующим образом

$$m_1 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right) f}{\sum f}; \quad m_2 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right)^2 f}{\sum f}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= h^2 \left[\frac{\sum \left(\frac{x-A}{h} \right)^2 f}{\sum f} - \left(\frac{\sum \left(\frac{x-A}{h} \right) f}{\sum f} \right)^2 \right] = \\ &= h^2 \frac{\sum (x^2 - 2Ax + A^2) f}{h^2 \sum f} - h^2 \frac{[\sum (x-A) f]^2}{h^2 (\sum f)^2} = \\ &= \frac{\sum x^2 f}{\sum f} - 2A \frac{\sum x f}{\sum f} + A^2 \frac{\sum f}{\sum f} - \left[\frac{\sum x f}{\sum f} - A \frac{\sum f}{\sum f} \right]^2 = \\ &= \overline{x^2} - 2A\bar{x} + A^2 - (\bar{x})^2 + 2A\bar{x} - A^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \end{aligned}$$

*Дисперсии количественного признака в совокупности,
разделенной на группы*

Для анализа связей количественных признаков в статистической совокупности, разделенной на группы, рассчитываются следующие дисперсии: групповая, межгрупповая, внутригрупповая и общая.

Групповая дисперсия (частная) характеризует вариацию признака в группе, обусловленную действием на него всех прочих факторов, кроме признака, положенного в основание группировки (группировочного признака):

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 f_{ij}}{\sum_{i=1}^{n_j} f_{ij}},$$

где x_{ij} — i -е значение признака в j -й группе; \bar{x}_j — частная (групповая) средняя величина признака в j -й группе; f_{ij} — статистический вес i -го значения признака в j -й группе; n_j — число различных значений признака в j -й группе.

Межгрупповая дисперсия измеряет степень колеблемости (вариацию) признака во всей статистической совокупности за счет фактора, положенного в основание группировки (группировочного признака):

$$\delta^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (\bar{x}_j - \bar{x})^2 F_j}{\sum_{j=1}^J F_j},$$

где \bar{x} — среднее значение признака в совокупности (общая средняя); F_j — вес j -й группы, представляющий собой численность единиц в j -й группе; J — количество групп в статистической совокупности.

Внутригрупповая дисперсия (средняя групповых дисперсий) измеряет степень колеблемости признака во всей совокупности в целом за счет действия на него всех прочих факторов (признаков), кроме группировочного признака:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_j \sigma_j^2 F_j}{\sum_j F_j}.$$

Общая дисперсия измеряет степень колеблемости признака, за счет влияния всех действующих на него факторов:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma^2} + \delta^2.$$

Общая дисперсия признака в статистической совокупности, разделенной на группы, может быть определена по основной формуле дисперсии

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}.$$

Межгрупповая и общая дисперсии применяются для определения показателей тесноты связи показателей в совокупности, разделенной на группы.

Дисперсия качественного альтернативного признака

Для определения дисперсии альтернативного признака допустим, что общее число единиц совокупности равно n . Число единиц, обладающих изучаемым признаком — f , тогда число единиц, не обладающих изучаемым признаком, равно $(n - f)$. Ряд распределения качественного (альтернативного) признака имеет следующий вид

Значение переменной	Частота повторений
1	f
0	$n - f$
<i>Итого</i>	n

Средняя арифметическая такого ряда равна:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot f + 0 \cdot (n - f)}{n} = \frac{f}{n},$$

то есть равна относительной частоте (частости) появления изучаемого признака, которую можно обозначить через p , тогда $\bar{x} = p$.

Доля единиц, обладающих изучаемым признаком, равна p , доля единиц, не обладающих изучаемым признаком, равна q , тогда $p + q = 1$.

Дисперсия доли альтернативного признака определяется по формуле

$$\sigma_p^2 = \frac{(1 - p)^2 f + (0 - p)^2 (n - f)}{n} = q^2 p + p^2 q = qp(p + q) = p \cdot q.$$

Дисперсии доли альтернативного признака в совокупности, разделенной на группы

Дисперсия доли альтернативного признака в группе (групповая дисперсия) рассчитывается по формуле

$$\sigma_{pj}^2 = p_j q_j = p_j (1 - p_j),$$

где p_j — доля единиц в j -й группе, обладающих изучаемым признаком; q_j — доля единиц в j -й группе, не обладающих изучаемым признаком.

Межгрупповая дисперсия доли признака

$$\delta_p^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (p_j - \bar{p})^2 F_j}{\sum_{j=1}^J F_j},$$

где F_j — число единиц совокупности в j -й группе; J — количество групп в статистической совокупности; \bar{p} — средняя доля признака во всей совокупности, которая рассчитывается следующим образом

$$\bar{p} = \frac{\sum_j p_j F_j}{\sum_j F_j}.$$

Внутригрупповая дисперсия (средняя из групповых дисперсий)

$$\overline{\sigma_p^2} = \frac{\sum_j \sigma_{pj}^2 F_j}{\sum_j F_j}.$$

Общая дисперсия доли признака в статистической совокупности, разделенной на группы

$$\sigma_p^2 = \bar{p}(1 - \bar{p}).$$

Общая дисперсия может быть также рассчитана как сумма средней из групповых дисперсий и межгрупповой дисперсии по правилу сложения дисперсий

$$\sigma_p^2 = \overline{\sigma_p^2} + \delta_p^2.$$

Коэффициент вариации

Коэффициент вариации вычисляется по формуле

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}},$$

где σ — среднее квадратическое отклонение; \bar{x} — средняя величина признака.

Коэффициент вариации выражается обычно в процентах и дает представление о степени однородности статистической совокупности. Если коэффициент меньше 25–30%, то статистическую совокупность по изучаемому признаку можно считать однородной.

3.2. Примеры решения задач по теме «Показатели вариации»

Задача 3.1

Имеются данные об индивидуальной производительности труда рабочих в двух бригадах (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Производительность труда рабочих

Номер рабочего	Производство продукции за смену, шт.	
	в первой бригаде	во второй бригаде
1	20	80
2	30	90
3	120	100
4	150	110
5	180	120
Итого	500	500

Определить среднюю производительность труда в бригадах, размах вариации, среднее линейное отклонение.

Решение

1. Средняя производительность труда в двух бригадах одинаковая

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{500}{5} = 100 \text{ шт.}$$

2. Размах вариации производительности труда

— в первой бригаде

$$R_1 = x_{\max 1} - x_{\min 1} = 180 - 20 = 160 \text{ шт.};$$

— во второй бригаде

$$R_2 = x_{\max 2} - x_{\min 2} = 120 - 80 = 40 \text{ шт.},$$

где x_{\max} , x_{\min} — наибольшее и наименьшее значение признака.

3. Среднее линейное отклонение вычисляется по формуле средней арифметической простой (невзвешенной)

$$\bar{d} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n},$$

где x_i — i -е значение признака x ; \bar{x} — средняя величина признака x ; n — число членов совокупности.

Расчет индивидуальных линейных отклонений производительности труда приведен в табл. 3.2.

Среднее линейное отклонение

— в первой бригаде

$$\bar{d}_1 = \frac{\sum |x_{i1} - \bar{x}_1|}{n} = \frac{300}{5} = 60 \text{ шт.};$$

Таблица 3.2. *Линейное отклонение производительности труда*

Номер рабочего	Первая бригада			Вторая бригада		
	x_{i1} , шт.	$x_{i1} - \bar{x}_{i1}$, шт.	$ x_{i1} - \bar{x}_{i1} $, шт.	x_{i2} , шт.	$x_{i2} - \bar{x}_{i2}$, шт.	$ x_{i2} - \bar{x}_{i2} $, шт.
1	120	80	80	180	20	20
2	130	70	70	190	10	10
3	120	20	20	100	10	10
4	150	50	50	110	10	10
5	180	80	80	120	20	20
<i>Итого</i>	500	0	300	500	0	60

— во второй бригаде

$$\bar{d}_2 = \frac{\sum |x_{i2} - \bar{x}_2|}{n} = \frac{60}{5} = 12 \text{ шт.}$$

Величина размаха вариации и среднего линейного отклонения указывает на то, что первая бригада является более неоднородной по производительности труда по сравнению со второй бригадой.

Задача 3.2

Распределение рабочих по тарифным разрядам приведено в графах 1 и 2 табл. 3.3.

Определить степень однородности совокупности рабочих по тарифному разряду.

Таблица 3.3. *Распределение рабочих по тарифным разрядам*

Тарифный разряд, x_i	Число рабочих, f_i	$x_i f_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})f_i$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
1	2	13	4	5	6
2	11	12	-2,5	-2,5	6,25
3	12	16	-1,5	-3,0	4,50
4	16	24	10,5	-3,0	1,50
5	18	40	10,5	14,0	2,00
6	13	18	11,5	14,5	6,75
<i>Итого</i>	20	90	—	10	21,00

Решение

1. Степень однородности совокупности по изучаемому показателю можно оценить с помощью коэффициента вариации

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}},$$

где σ — среднее квадратическое отклонение тарифного разряда; \bar{x} — средний тарифный разряд.

2. Расчет среднего значения, дисперсии и среднего квадратического отклонения тарифного разряда производится по следующим формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}; \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}; \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2},$$

где x_i — i -й тарифный разряд; f_i — число рабочих, имеющих i -й тарифный разряд.

Расчет числителей средней величины и дисперсии приведен в графах 3–6 табл. 3.3.

3. Средний тарифный разряд рабочих

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{90}{20} = 4,5 \text{ разряд};$$

дисперсия тарифного разряда

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{21}{20} = 1,05;$$

среднее квадратическое отклонение тарифного разряда

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,05} = 1,025 \text{ разряда};$$

коэффициент вариации тарифного разряда

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,025}{4,5} = 0,227 \text{ (22,7\%)}.$$

При коэффициенте вариации 22,7 % совокупность рабочих можно считать однородной по тарифному разряду.

Задача 3.3

Распределение рабочих по заработной плате приведено в графах 1 и 2 табл. 3.4.

Определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение заработной платы рабочих способом моментов.

Решение

При использовании способа моментов расчет дисперсии осуществляется по формуле

$$\sigma^2 = h^2(m_2 - m_1^2),$$

где m_1, m_2 — моменты первого и второго порядка

$$m_1 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right) f}{\sum f}; \quad m_2 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right)^2 f}{\sum f}.$$

Расчет числителей моментов при $A = 8$ тыс. р. (значение заработной платы, имеющее наибольшую частоту) и $h = 2$ тыс. р. (величина интервала группировок) приведен в графах 4–6 табл. 3.4.

Момент первого порядка

$$m_1 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right) f}{\sum f} = \frac{134}{200} = 0,67;$$

момент второго порядка

$$m_2 = \frac{\sum \left(\frac{x - A}{h} \right)^2 f}{\sum f} = \frac{444}{200} = 2,22;$$

дисперсия заработной платы

$$\sigma^2 = h^2(m_2 - m_1^2) = 2^2(2,22 - 0,67^2) = 7,0844;$$

среднее квадратическое отклонение заработной платы

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7,0844} = 2,66 \text{ тыс. р.}$$

Задача 3.4

На предприятии работает 2000 человек, из них 1600 - мужчины. Определить дисперсию и среднее квадратическое отклонение доли мужчин на предприятии.

Решение

1. Доля мужчин на предприятии

$$p = \frac{f}{n} = \frac{1600}{2000} = 0,8;$$

доля женщин

$$q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2.$$

2. Дисперсия доли мужчин

$$\sigma_p^2 = p \cdot q = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;$$

среднее квадратическое отклонение доли мужчин

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0,16} = 0,4.$$

Задача 3.5

Данные о численности официально зарегистрированных безработных и численности экономически активного населения в Северо-Западном Федеральном округе на конец июня 2004 г. [23] приведены в графах 1, 2 табл. 3.5.

Таблица 3.5. Основные показатели регистрируемого рынка труда в Северо-Западном Федеральном округе на конец июня 2004 г.

Территория	Численность официально зарегистрированных безработных, $N_{б/}$, тыс. чел.	Численность экономически активного населения, $N_{а/}$, тыс. чел.	Уровень регистрируемой безработицы, p_j , %
А	1	2	3
Республика Карелия	10,8	400,0	2,7
Республика Коми	14,3	595,8	2,4
Архангельская область	14,9	745,0	2,0
Ненецкий автономный округ	11,1	125,0	4,4
Вологодская область	11,1	652,9	1,7
Калининградская область	17,9	493,8	1,6
Ленинградская область	18,5	850,0	1,0
Мурманская область	18,8	569,7	3,3
Новгородская область	13,9	354,5	1,1
Псковская область	19,3	372,0	2,5
г. Санкт-Петербург	17,0	2428,61	0,7
<i>Итого</i>	117,6	7487,3	–

Определить дисперсию доли безработных в Северо-Западном Федеральном округе на основе средней доли безработных по округу и с использованием правила сложения дисперсий.

Решение

1. Уровень регистрируемой безработицы (доля безработных в численности экономически активного населения) рассчитывается по формуле

$$p_j = \frac{N_{6j}}{N_{aj}}.$$

Результаты расчета приведены в графе 3 табл. 3.5.

2. Средняя доля безработных в Северо-Западном Федеральном округе может быть рассчитана по следующим формулам:

— средней агрегатной

$$\bar{p} = \frac{\sum_j^J N_6}{\sum_j^J N_a} = \frac{117,6}{7487,3} = 0,0157 (1,57\%);$$

— средней арифметической взвешенной

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\sum_j^J p_j N_a}{\sum_j^J N_a} = \frac{400 \cdot 0,027 + 595,8 \cdot 0,24 + \dots + 2428,6 \cdot 0,007}{7487,3} = \\ &= \frac{117,6}{7487,3} = 0,0157. \end{aligned}$$

3. Общая дисперсия доли безработных в Северо-Западном Федеральном округе, разделенном на субъекты РФ, рассчитанная на основе средней доли безработных

$$\sigma_p^2 = \bar{p}(1 - \bar{p}) = 0,0157(1 - 0,0157) = 0,015454.$$

4. Дисперсия доли альтернативного признака в группе (групповая дисперсия) рассчитывается по формуле

$$\sigma_{pj}^2 = p_j q_j,$$

где p_j — доля безработных, зарегистрированных в j -м субъекте РФ; q_j — доля занятых в j -м субъекте РФ.

Например, дисперсия доли безработных по республике Карелия

$$\sigma_{p1}^2 = p_1q_1 = p_1(1 - p_1) = 0,027(1 - 0,027) = 0,02627.$$

Результаты расчета групповой дисперсии доли безработных по всем субъектам РФ в Северо-Западном Федеральном округе приведены в графе 4 табл. 3.6.

5. Данные для расчета внутригрупповой и межгрупповой дисперсии доли безработных приведены в графах 5, 6 табл. 3.6.

Внутригрупповая дисперсия (средняя из групповых дисперсий) доли безработных

Таблица 3.6. Расчет дисперсий доли безработных в Северо-Западном Федеральном округе

Территория	Численность экономически активного населения, N_{aj} , тыс. чел.	Уровень регистрируемой безработицы, p_j , %	Групповая дисперсия доли безработных, σ_{pj}^2	$\sigma_{pj}^2 N_{aj}$	$(p_j - \bar{p})^2 N_{aj}$
А	2	3	4	5	6
Республика Карелия	1400,0	2,7	0,02627	10,508	0,05108
Республика Коми	1595,8	2,4	0,02342	13,954	0,04105
Архангельская область	1745,0	2,0	0,01960	14,602	0,01378
Ненецкий автономный округ	25,0	4,4	0,04206	11,052	0,02002
Вологодская область	1652,9	1,7	0,01671	10,910	0,00110
Калининградская область	493,8	1,6	0,01574	17,772	0,00004
Ленинградская область	850,0	1,0	0,00990	18,415	0,02762
Мурманская область	1569,7	3,3	0,03191	18,179	0,17051
Новгородская область	354,5	1,1	0,01088	13,857	0,00783
Псковская область	372,0	2,5	0,02438	19,069	0,03217
г. Санкт-Петербург	2428,6	0,7	0,00695	16,879	0,18382
<i>Итого</i>	7487,3	–	–	115,197	0,54902

$$\overline{\sigma_p^2} = \frac{\sum_j \sigma_{pj}^2 N_{aj}}{\sum_j N_{aj}} = \frac{115,197}{7487,3} = 0,015385.$$

Межгрупповая дисперсия доли безработных

$$\delta_p^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (p_j - \bar{p})^2 N_{aj}}{\sum_{j=1}^J N_{aj}} = \frac{0,54902}{7487,3} = 0,00007$$

6. Общая дисперсия доли безработных в Северо-Западном Федеральном округе, разделенном на субъекты РФ, рассчитанная с использованием правила сложения дисперсий

$$\sigma_p^2 = \overline{\sigma_p^2} + \delta_p^2 = 0,015385 + 0,00007 = 0,015455$$

практически совпадает с результатом расчета общей дисперсии в п. 3 задачи. Незначительные расхождения обусловлены погрешностью округления.

7. Среднее квадратическое отклонение доли безработных

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{0,015455} = 0,1243.$$

4. ПОКАЗАТЕЛИ РЯДОВ ДИНАМИКИ

4.1. Методические указания к решению задач по теме «Показатели рядов динамики»

Рядом динамики называется ряд значений показателя, расположенных в хронологическом порядке.

На рис. 4.1 приведены абсолютные, относительные и средние показатели ряда динамики.

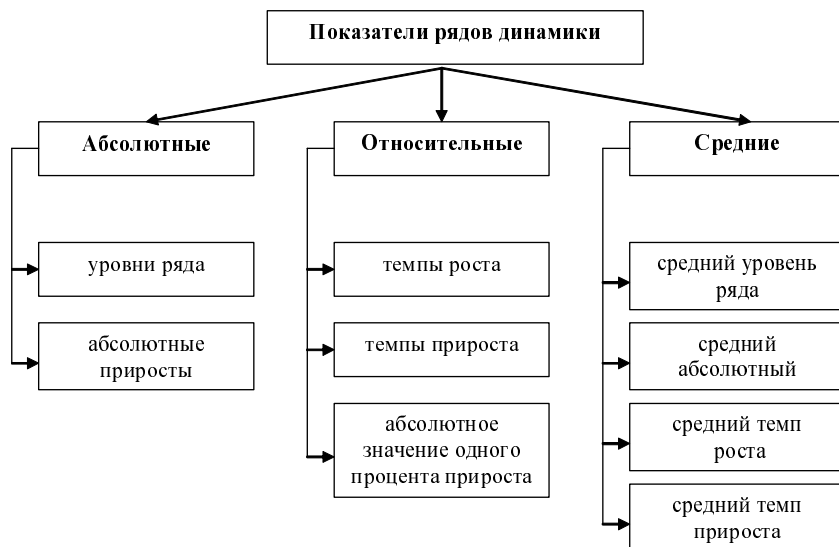


Рис. 4.1. Показатели рядов динамики

Абсолютные показатели рядов динамики

Уровни ряда динамики – это числовые значения показателя. *Начальным уровнем* ряда y_0 (или y_1) называется первый член ряда, последнее в ряду значение y_n называется конечным уровнем ряда динамики.

Абсолютный прирост представляет собой разность двух уровней ряда динамики. Абсолютный прирост характеризует скорость (в абсолютном выражении) изменения уровней ряда динамики в единицу времени. Если производится сравнение каждого данного уровня y_i с непосредственно ему предшествующим y_{i-1} , то разность называется цепным абсолютным приростом. Если каждый уровень y_i сравнива-

ется с начальным или каким-либо другим, принятым за постоянную базу сравнения, то получаются базисные абсолютные приросты.

Абсолютный прирост

— цепной

$$\Delta y_i^{\Pi} = y_i - y_{i-1};$$

— базисный

при начальном уровне ряда y_0

$$\Delta y_i^{\delta} = y_i - y_0;$$

при начальном уровне ряда y_1

$$\Delta y_i^{\delta} = y_i - y_1,$$

где y_i – уровень ряда динамики в i -й момент или за i -й период времени; y_{i-1} – уровень ряда в $(i-1)$ -й момент или за $(i-1)$ -й период времени.

Сумма цепных приростов за определенный период времени равна базисному абсолютному приросту за весь этот период или разности между конечным и начальным уровнями ряда динамики:

при начальном уровне ряда y_0

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i^{\Pi} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i-1}) = \Delta y_n^{\delta} = y_n - y_0;$$

при начальном уровне ряда y_1

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i^{\Pi} = y_n - y_1.$$

Относительные показатели рядов динамики

Темп роста представляет собой отношение двух уровней ряда динамики. Темпы роста могут быть вычислены с переменной и постоянной базой сравнения. Первые называются цепными, вторые – базисными.

Темп роста

— цепной

$$T_{pi}^{\Pi} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100, \%;$$

— базисный

при начальном уровне ряда y_0

$$T_{pi}^{\delta} = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100, \% ;$$

при начальном уровне ряда y_1

$$T_{pi}^{\delta} = \frac{y_i}{y_1} \cdot 100, \% .$$

Темп прироста представляет собой отношение абсолютного прироста к уровню динамики, по сравнению с которым он рассчитан. Для ряда динамики темпы прироста могут быть вычислены с переменной базой сравнения, они называются цепными, и с постоянной — базисными.

Темп прироста

— цепной

$$T_{при}^{\delta} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100 = \frac{\Delta y_i^{\delta}}{y_{i-1}} \cdot 100 = T_{pi}^{\delta} - 100, \% ;$$

— базисный

при начальном уровне ряда y_0

$$T_{при}^{\delta} = \frac{y_i - y_0}{y_0} \cdot 100 = \frac{\Delta y_i^{\delta}}{y_0} \cdot 100 = T_{pi}^{\delta} - 100, \% ;$$

при начальном уровне ряда y_1

$$T_{при}^{\delta} = \frac{y_i - y_1}{y_1} \cdot 100 = \frac{\Delta y_i^{\delta}}{y_1} \cdot 100 = T_{pi}^{\delta} - 100, \% .$$

Абсолютное значение одного процента прироста представляет собой отношение абсолютного прироста к темпу прироста, выраженному в процентах

$$|A_i| = \frac{\Delta y_i^{\delta}}{T_{при}^{\delta}, \%} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100} = 0,01 \cdot y_{i-1} .$$

Средние показатели рядов динамики

Средний уровень ряда представляет собой среднюю хронологическую величину из уровней ряда динамики. Рассчитывается для интервальных и моментных рядов с равными и неравными интервалами времени.

В интервальном ряду средняя хронологическая
— невзвешенная (для ряда с равными интервалами)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n};$$

— взвешенная (для ряда с неравными интервалами)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i},$$

где y_i — значение уровня ряда на i -м интервале; t_i — продолжительность i -го интервала времени.

В моментном ряду средняя хронологическая
— невзвешенная (для ряда с равноотстоящими моментами времени)
при начальном уровне ряда y_0

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_0 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n};$$

при начальном уровне ряда y_1

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1};$$

— взвешенная (для ряда с неравноотстоящими моментами времени)
при начальном уровне ряда y_0

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i)t_i}{2\sum_{i=1}^n t_i};$$

при начальном уровне ряда y_1

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i + y_{i+1})t_i}{2\sum_{i=1}^{n-1} t_i},$$

где y_i — уровень ряда в i -й момент времени; t_i — период времени, отделяющий один уровень ряда от другого.

Средний абсолютный прирост рассчитывается по формулам при начальном уровне ряда y_0

$$\bar{\Delta y} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^{\Pi}}{n} = \frac{y_n - y_0}{n}.$$

при начальном уровне ряда y_1

$$\bar{\Delta y} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^{\Pi}}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}.$$

Средний темп роста определяется следующим образом при начальном уровне ряда y_0

$$\bar{T}_p = \sqrt[n]{T_{p1}^{\Pi} \cdot T_{p2}^{\Pi} \cdot \dots \cdot T_{pn}^{\Pi}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n T_{pi}^{\Pi}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{y_i}{y_{i-1}}}, \%;$$

при начальном уровне ряда y_1

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{T_{p1}^{\Pi} \cdot T_{p2}^{\Pi} \cdot \dots \cdot T_{pn-1}^{\Pi}} = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^n T_{pi}^{\Pi}} = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^n \frac{y_i}{y_{i-1}}}, \%.$$

Так как произведение цепных темпов роста равно базисному

$$\frac{y_1}{y_0} \cdot \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \dots \cdot \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_0}, \text{ или } \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_4}{y_3} \cdot \dots \cdot \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{y_n}{y_1},$$

то средний темп роста может быть рассчитан на основе базисного темпа роста

при начальном уровне ряда y_0

$$\bar{T}_p = \sqrt[n]{T_n^{\text{б}}} = \sqrt[n]{\frac{y_n}{y_0}}, \%;$$

при начальном уровне ряда y_1

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^n T_i^{\Pi}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}, \%.$$

Средний темп прироста вычисляется как разность между средним темпом роста и 100 %

$$\bar{T}_{\text{пр}} = \bar{T}_p - 100, \%.$$

4.2. Примеры решения задач по теме «Показатели рядов динамики»

Задача 4.1

Имеются данные [20, 21, 22] о численности постоянного населения Российской Федерации с 1996 по 2006 гг. (графа 1 табл. 4.1).

Определить абсолютные, относительные и средние показатели ряда динамики.

Решение

Ряд динамики населения состоит из 9-ти уровней ($n = 9$), начальный уровень N_1 . Ниже приведен расчет показателей изменения уровня ряда N_7 в 2002 г.

1. Абсолютными показателями изменения уровней ряда динамики в 2002 г. являются

— цепной абсолютный прирост

$$\Delta N_7^{\text{ц}} = N_7 - N_6 = 144,0 - 144,8 = -0,8 \text{ млн чел.};$$

Таблица 4.1. Численность постоянного населения Российской Федерации (на января)

Год	Численность населения, N_i , млн чел.	Номер уровня ряда, i	Абсолютный прирост, чел.		Темп роста, %		Темп прироста, %		Абсолютное значение 1 % прироста
			цепные	базисные	цепные	базисные	цепные	базисные	
А	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1996	147,6	1		0		100,01		0	
1997	147,1	2	-0,5	-0,5	99,66	99,66	-0,34	-0,34	1,476
1998	146,7	3	-0,4	-0,9	99,73	99,39	-0,27	-0,61	1,471
1999	146,3	4	-0,4	-1,3	99,73	99,12	-0,27	-0,88	1,467
2000	145,6	5	-0,7	-2,0	99,52	98,64	-0,48	-1,36	1,463
2001	144,8	6	-0,8	-2,8	99,45	98,10	-0,55	-1,90	1,456
2002	144,0	7	-0,8	-3,6	99,45	97,56	-0,55	-2,44	1,448
2003	145,0	8	-1,0	-2,6	100,69	98,24	-0,69	-1,76	1,440
2004	144,2	9	-0,8	-3,4	99,45	97,70	-0,55	-2,30	1,450
2005	143,5	10	-0,7	-4,1	99,65	97,22	-0,35	-2,78	1,442
2006	142,6	11	-0,9	-5,0	99,37	96,61	-0,28	-3,39	1,435

— базисный абсолютный прирост

$$\Delta N_7^6 = N_7 - N_1 = 144,0 - 147,6 = -3,6 \text{ млн чел.}$$

Сумма цепных приростов за 1996–2002 гг. равна

$$\sum_{i=1}^7 \Delta y_i^{\text{ц}} = \Delta N_7^6 = N_7 - N_1 = -0,8 - 0,8 - 0,7 - 0,4 - 0,4 - 0,5 = -3,6 \text{ млн р.}$$

2. Относительные показатели динамики населения рассчитываются следующим образом:

— цепной темп роста

$$T_{p7}^{\text{ц}} = \frac{N_7}{N_6} \cdot 100 = \frac{144,0}{144,8} \cdot 100 = 99,45 \% ;$$

— базисный темп роста

$$T_{p7}^6 = \frac{N_7}{N_1} \cdot 100 = \frac{144,0}{147,6} \cdot 100 = 97,56 \% ;$$

— цепной темп прироста

$$T_{\text{пр}7}^{\text{ц}} = T_{p7}^{\text{ц}} - 100 = 99,45 - 100 = -0,55 \% ;$$

— базисный темп прироста

$$T_{\text{пр}7}^6 = T_{p7}^6 - 100 = 97,56 - 100 = -2,44 \% ;$$

— абсолютное значение одного процента прироста

$$|A_7| = 0,01 \cdot N_6 = 0,01 \cdot 144,8 = 1,448 \text{ млн чел.}$$

Результаты расчетов абсолютных и относительных показателей изменения уровней ряда динамики населения приведены в графах 3–9 табл. 4.1.

3. Средние показатели ряда динамики населения рассчитываются следующим образом:

— средняя численность населения определяется по формуле средней хронологической для моментного ряда с равноотстоящими интервалами

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \frac{\frac{1}{2}N_1 + N_2 + \dots + N_{n-1} + \frac{1}{2}N_n}{n-1} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 147,6 + 147,1 + 146,7 + \dots + 145,0 + 0,5 \cdot 142,6}{11-1} = 145,2 \text{ млн чел.;} \end{aligned}$$

— средний абсолютный прирост

$$\bar{\Delta N} = \frac{N_n - N_1}{n - 1} = \frac{144,2 - 147,6}{11 - 1} = -0,5 \text{ млн чел.};$$

— средний темп роста

$$\begin{aligned} \bar{T}_p &= \sqrt[n-1]{T_{p1}^u \cdot T_{p2}^u \cdot \dots \cdot T_{pn}^u} = \sqrt[9]{0,9966 \cdot 0,9973 \cdot \dots \cdot 0,9965 \cdot 0,9937} = \\ &= \sqrt[n-1]{T_{pn}^6} = \sqrt[9]{0,9661} = 0,9966 \text{ (99,66 \%)}; \end{aligned}$$

— средний темп прироста

$$\bar{T}_{пр} = \bar{T}_p - 100 = 99,66 - 100 = -0,34 \text{ \%}.$$

Задача 4.2

Имеются данные о значениях показателя на начало года в моментном ряду динамики. Величина показателя увеличилась за четыре года в 16 раз.

Определить среднегодовой темп прироста показателя.

Решение

Из условия задачи анализируется изменение показателя в течение 4-х лет. Базовый темп роста для моментного ряда с равноотстоящими интервалами рассчитан следующим образом

$$T_p^6 = \frac{y_5}{y_1} = 16 \text{ раз.}$$

В моментном ряду динамики с числом уровней ряда $n = 5$ и начальным уровнем y_1

— среднегодовой темп роста

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{T_n^6} = \sqrt[5-1]{16} = 2,0 \text{ (200 \%)}.$$

— среднегодовой темп прироста

$$\bar{T}_{пр} = \bar{T}_p - 100 = 200 - 100 = 100 \text{ \%}.$$

Задача 4.3

Имеются данные о значениях показателя на начало года в моментном ряду динамики. Величина показателя увеличилась за четыре года на 16 %.

Определить среднегодовой темп роста показателя.

Решение

Из условия задачи анализируется изменение показателя в течение 4-х лет. Базовый темп роста

$$\bar{T}_p = 100 + \bar{T}_{\text{пр}} = 100 - 16 = 116 \%$$

для моментного ряда с равноотстоящими интервалами рассчитан следующим образом

$$T_p^6 = \frac{y_5}{y_1} \cdot 100 = 116 \%$$

В моментном ряду динамики с числом уровней ряда $n = 5$ и начальным уровнем y_1
— среднегодовой темп роста

$$\bar{T}_p = n^{-1} \sqrt[n]{T_n^6} = 5^{-1} \sqrt[5]{1,16} = 1,0378 (103,78 \%)$$

Задача 4.4

Имеются данные о значениях показателя в интервальном ряду динамики с равными интервалами. Величина показателя увеличилась за четыре года в 16 раз.

Определить среднегодовой темп роста показателя.

Решение

Из условия задачи анализируется изменение показателя в течение 4-х лет. Базовый темп роста для интервального ряда с равноотстоящими интервалами рассчитан следующим образом

$$T_p^6 = \frac{y_4}{y_1} = 16 \text{ раз.}$$

В интервальном ряду динамики с числом уровней ряда $n = 4$ и начальным уровнем y_1
— среднегодовой темп роста

$$\bar{T}_p = n^{-1} \sqrt[n]{T_n^6} = 4^{-1} \sqrt[4]{16} = 2,52 (252 \%)$$

Задача 4.5

Имеются данные об относительном изменении выпуска продукции на предприятии (табл. 4.2).

Определить выпуск продукции в 2005 г. по сравнению с 2002 г.

Решение

В табл. 4.2 заданы цепные темпы прироста продукции

$$T_{\text{пр}03/02} = +5 \%; T_{\text{пр}04/03} = -10 \%; T_{\text{пр}05/04} = +5 \%$$

Таблица 4.2. Относительное изменение выпуска продукции

Выпуск продукции	Изменение выпуска продукции
в 2003 по сравнению с 2002 г.	увеличился на 5 %
в 2004 по сравнению с 2003 г.	снизился на 10 %
в 2005 по сравнению с 2004 г.	увеличился на 5 %

Цепные темпы роста равны

$$T_{p03/02} = +105 \% ; T_{пр04/03} = 90 \% ; T_{пр05/04} = +105 \% .$$

Базисный темп роста продукции в 2005 г. по сравнению с 2002 г. равен произведению цепных темпов роста

$$T_{p05/02} = 1,05 \cdot 0,90 \cdot 1,05 = 0,992 (99,2 \%) .$$

Задача 4.6

Имеются данные об объеме и динамике товарной продукции на предприятии (табл. 4.3).

Определить объем выпуска товарной продукции в 2003 г.

Решение

1. В табл. 4.3 приведены следующие показатели:

— цепной темп роста объема продукции в 2005 г. по сравнению с 2004 г.

$$T_{p05/04}^ц = \frac{y_2}{y_1} \cdot 100 = 98,9 \% ;$$

— цепной темп прироста объема продукции в 2004 г. по сравнению с 2003 г.

$$T_{пр04/03}^ц = \frac{y_1}{y_0} \cdot 100 - 100 = 11,2 \% ;$$

Таблица 4.3. Объем и динамика товарной продукции

Показатель	Годы		
	2003	2004	2005
Объем товарной продукции, млн р.			176
Темп роста объема товарной продукции по сравнению с предыдущим годом, %			98,9
Темп прироста объема товарной продукции по сравнению с предыдущим годом, %		11,2	

— объем товарной продукции в 2005 г.

$$y_2 = 176 \text{ млн р.},$$

где y_0, y_1, y_2 — объем товарной продукции в 2003, 2004, 2005 гг.

$$\text{Тогда, } \frac{y_2}{y_1} = 0,989; \quad y_1 = \frac{y_2}{0,989} = \frac{176}{0,989} = 177,96 \text{ млн р.}$$

$$\frac{y_1}{y_0} - 1 = 0,112; \quad \frac{y_1}{y_0} = 1,112.$$

Объем товарной продукции в 2003 г.

$$y_0 = \frac{y_1}{1,112} = \frac{177,96}{1,112} = 160,0 \text{ млн р.}$$

2. При решении задачи может быть использована взаимосвязь цепных и базисных индексов: произведение цепных индексов равно базисному. Исходная информация из табл. 4.3 имеет следующий вид:

— цепной темп роста объема продукции в 2005 г. по сравнению с 2004 г.

$$T_{p05/04}^ц = 0,989;$$

— цепной темп роста объема продукции в 2004 г. по сравнению с 2003 г.

$$T_{p04/03}^ц = T_{пр04/03}^ц + 1 = 1,112;$$

— объем товарной продукции в 2005 г.

$$y_2 = 176 \text{ млн р.}$$

Базисный темп роста объема товарной продукции в 2005 г. по сравнению с 2003 г. равен произведению цепных темпов роста

$$T_{p05/03}^б = T_{p05/04}^ц \cdot T_{p04/03}^ц = 0,989 \cdot 1,112 = 1,0998 = \frac{y_2}{y_0}.$$

Тогда, объем товарной продукции в 2003 г.

$$y_0 = \frac{y_2}{T_{p05/03}^б} = \frac{176}{1,0998} = 160,0 \text{ млн р.}$$

5. ИНДЕКСЫ

5.1. Методические указания к решению задач по теме «Индексы»

Индекс — относительная величина, характеризующая соотношение значений показателя во времени (динамический индекс), в пространстве (территориальный индекс), а также сравнение плановой величины с фактической величиной показателя в предшествующем периоде или сравнение фактического и планового значения показателя в отчетном периоде.

При сравнении значений показателя единицы совокупности применяются индивидуальные индексы

$$i_x = \frac{x_1}{x_0},$$

где x_0, x_1 — значение показателя в базисном и отчетном периодах.

Для анализа изменения показателя во всей совокупности применяются индексы, показанные на рис. 5.1.

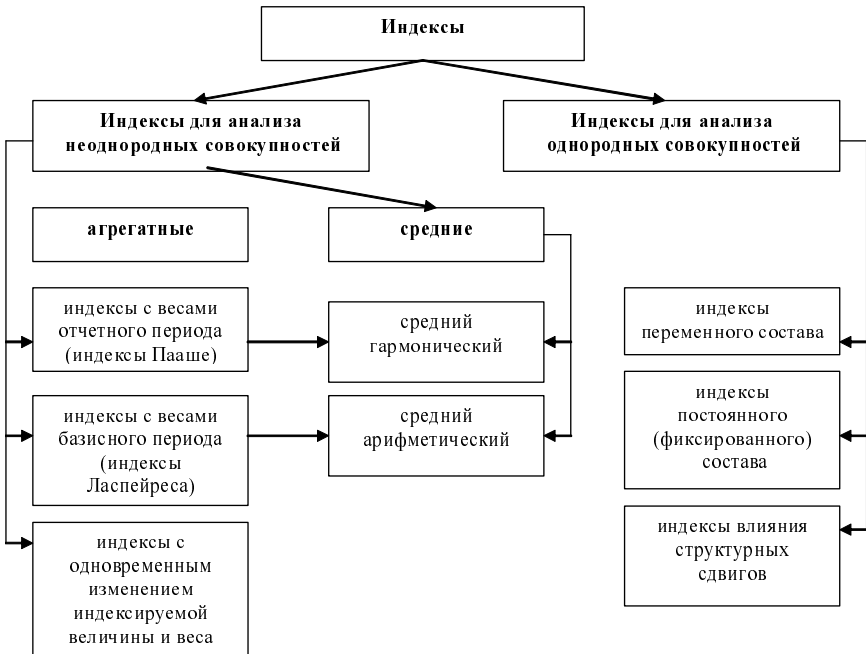


Рис. 5.1. Разновидности индексов

Агрегатные индексы

Основной формой сводного индекса является *агрегатный индекс*, который вычисляется по следующим формулам:

— *агрегатный индекс с весами отчетного периода (индекс Пааше)*. Применяется в основном для изучения вторичных (расчетных) показателей

$$I_x^{\text{П}} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1},$$

например, агрегатный индекс цены

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1};$$

— *агрегатный индекс с весами базисного периода (индекс Ласпейреса)*. Применяется в основном для изучения первичных (объемных) показателей

$$I_x^{\text{Л}} = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0},$$

например, индекс физического объема продукции (объема производства в неизменных ценах)

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0};$$

— *агрегатный индекс одновременного изменения индексируемой величины и веса*. Применяется для изучения результирующих показателей, зависящих от влияющих факторов

$$I_{xf} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0},$$

например, индекс стоимости продукции (объема производства в фактических ценах)

$$I_Q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0},$$

где x_0, x_1 — индексируемая величина в базисном и текущем периодах; f_0, f_1 — статистический вес индексируемой величины в базисном и отчетном периодах; p_0, p_1 — цена изделия в базисном и отчетном

периодах; q_0, q_1 — физический объем продукции в базисном и отчетном периодах.

Взаимосвязь агрегатных индексов представляет собой индексную систему. Агрегатный индекс с одновременным изменением индексированной величины и веса равен произведению индекса с весами отчетного периода и индекса с весами базисного периода (индексов Пааше и Ласпейреса).

Индексная система, показывающая взаимосвязь стоимости продукции, цен и физического объема, имеет следующий вид

$$I_Q = I_p \cdot I_q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}.$$

При изучении динамики явлений рассчитываются цепные и базисные агрегатные индексы.

Цепные и базисные индексы с постоянными весами

Индексы с постоянными весами, как правило, вычисляются при анализе объемных (первичных) показателей, например, физического объема продукции.

Индексы с постоянными весами рассчитываются следующим образом:

— базисные индексы с постоянными весами

$$I_1^{\text{б}} = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0}; I_2^{\text{б}} = \frac{\sum x_2 f_0}{\sum x_0 f_0}; \dots; I_i^{\text{б}} = \frac{\sum x_i f_0}{\sum x_0 f_0}; \dots; I_n^{\text{б}} = \frac{\sum x_n f_0}{\sum x_0 f_0};$$

— цепные индексы с постоянными весами

$$I_1^{\text{ц}} = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0}; I_2^{\text{ц}} = \frac{\sum x_2 f_0}{\sum x_1 f_0}; \dots; I_i^{\text{ц}} = \frac{\sum x_i f_0}{\sum x_{i-1} f_0}; \dots; I_n^{\text{ц}} = \frac{\sum x_n f_0}{\sum x_{n-1} f_0},$$

где $I_i^{\text{б}}$ — базисный индекс i -го периода; $I_i^{\text{ц}}$ — цепной индекс i -го периода; x_i значения показателя в i -м периоде.

Например, базисные $I_q^{\text{б}}$ и цепные $I_q^{\text{ц}}$ индексы физического объема продукции с постоянными весами — ценами базисного периода p_0 :

$$I_{q1}^{\text{б}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad I_{q2}^{\text{б}} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad \dots; \quad I_{qn}^{\text{б}} = \frac{\sum q_n p_0}{\sum q_0 p_0};$$

$$I_{q1}^{\text{ц}} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}; \quad I_{q2}^{\text{ц}} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0}; \quad \dots; \quad I_{qn}^{\text{ц}} = \frac{\sum q_n p_0}{\sum q_{n-1} p_0}.$$

Цепные и базисные индексы с переменными весами

Индексы с переменными весами используются для анализа вторичных (расчетных) показателей (цены, себестоимости единицы продукции, производительности труда и др.).

Индексы с переменными весами рассчитываются следующим образом:

— базисные индексы с переменными весами

$$I_1^{\bar{}} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1}; I_2^{\bar{}} = \frac{\sum x_2 f_2}{\sum x_0 f_2}; \dots; I_i^{\bar{}} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_0 f_i}; \dots; I_n^{\bar{}} = \frac{\sum x_n f_n}{\sum x_0 f_n};$$

— цепные индексы с переменными весами

$$I_1^{\Pi} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1}; I_2^{\Pi} = \frac{\sum x_2 f_2}{\sum x_1 f_2}; \dots; I_i^{\Pi} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_{i-1} f_i}; \dots; I_n^{\Pi} = \frac{\sum x_n f_n}{\sum x_{n-1} f_n},$$

где f_i — вес показателя x в i -м периоде.

Например, базисные $I_p^{\bar{}}$ и цепные I_p^{Π} индексы цен с переменными весами — физическими объемами продукции q_i :

$$I_{p1}^{\bar{}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}; \quad I_{p2}^{\bar{}} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_2}; \quad \dots; \quad I_{qn}^{\bar{}} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n},$$

$$I_{p1}^{\Pi} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}; \quad I_{p2}^{\Pi} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2}; \quad \dots; \quad I_{pn}^{\Pi} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_{n-1} q_n}.$$

Индексы переменного, постоянного состава и влияния структурных сдвигов

Индексы переменного, постоянного состава и влияния структурных сдвигов используются при анализе показателей в однородных совокупностях.

Индекс переменного состава показывает соотношение средних уровней изучаемого явления, относящихся к разным периодам времени или разным территориям. Индекс переменного состава вычисляется следующим образом:

$$I_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_0} : \frac{\sum f_1}{\sum f_0} = \frac{\sum x_1 d_1}{\sum x_0 d_0},$$

где \bar{x}_0, \bar{x}_1 — среднее значение показателя в базисном и отчетном периодах; d_0, d_1 — удельный вес показателя f в базисном и отчетном периодах.

Например, индекс переменного состава себестоимости однородной продукции

$$I_z = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum z_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum z_1 d_{q1}}{\sum z_0 d_{q0}},$$

где z_0, z_1 — средняя себестоимость единицы продукции в базисном и отчетном периодах; q_0, q_1 — количество единиц продукции, изготовленной в базисном и отчетном периодах; d_{q0}, d_{q1} — удельный вес продукции в базисном и отчетном периодах.

Индекс себестоимости переменного состава показывает изменение средней себестоимости единицы изделия под влиянием изменения себестоимости на отдельных предприятиях и структуры выпускаемой продукции.

Индекс постоянного (фиксированного) состава вычисляется с весами, фиксируемыми на уровне отчетного периода:

$$I_x = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1} = \frac{\sum x_1 d_1}{\sum x_0 d_1}.$$

Например, индекс себестоимости постоянного состава

$$I_z = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1} = \frac{\sum z_1 d_{q1}}{\sum z_0 d_{q1}}.$$

Индекс себестоимости постоянного состава показывает изменение средней себестоимости изделия под влиянием изменения себестоимостей на отдельных предприятиях.

Индекс влияния структурных сдвигов характеризует влияние структурных сдвигов (изменения структуры изучаемого явления) на динамику среднего уровня этого явления. В общем виде этот индекс записывается следующим образом:

$$I_{x, \text{стр. сдв}} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum f_1} : \frac{\sum x_0 f_0}{\sum f_0} = \frac{\sum x_0 f_1}{\sum x_0 f_0} : \frac{\sum f_1}{\sum f_0} = \frac{\sum x_0 d_1}{\sum x_0 d_0}.$$

Например, индекс влияния структурных сдвигов на себестоимость

$$I_{z, \text{стр. сдв}} = \frac{\sum z_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum z_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{\sum z_0 d_{q1}}{\sum z_0 d_{q0}}$$

показывает изменение средней себестоимости изделия под влиянием изменения структуры выпускаемой продукции.

Индексы переменного, постоянного состава и влияния структурных сдвигов связаны между собой. Индекс переменного состава равен произведению индекса постоянного состава и индекса влияния структурных сдвигов

$$I_{\bar{x}} = I_x \cdot I_{x, \text{стр. сдв.}}$$

Средние индексы

Средние индексы получаются путем преобразования агрегатных индексов Пааше и Ласпейреса.

Средний гармонический индекс получается путем замены в агрегатном индексе Пааше

$$x_0 = \frac{x_1}{i_x} \text{ из индивидуального индекса } i_x = \frac{x_1}{x_0}.$$

Тогда средний гармонический индекс тождественный агрегатному индексу Пааше

$$I_x^{\text{П}} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum x_0 f_1} = \frac{\sum x_1 f_1}{\sum \frac{1}{i_x} x_1 f_1}.$$

Например, средний гармонический индекс цен, тождественный агрегатному индексу цен Пааше,

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_p} p_1 q_1} = \frac{\sum Q_1}{\sum \frac{1}{i_p} Q_1}$$

при замене

$$p_0 = \frac{p_1}{i_p} \text{ из индивидуального индекса цены } i_p = \frac{p_1}{p_0}.$$

Средний арифметический индекс получается путем замены в агрегатном индексе Ласпейреса

$$x_1 = i_x x_0 \text{ из индивидуального индекса } i_x = \frac{x_1}{x_0}.$$

Тогда средний арифметический индекс, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса,

$$I_x^{\text{Л}} = \frac{\sum x_1 f_0}{\sum x_0 f_0} = \frac{\sum i_x x_0 f_0}{\sum x_0 f_0}.$$

Например, средний арифметический индекс физического объема продукции, тождественный агрегатному индексу цен Ласпейреса,

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum i_q Q_0}{\sum Q_0}$$

при замене

$$q_1 = i_q q_0 \text{ из индивидуального индекса физического объема } i_q = \frac{q_1}{q_0}.$$

5.2. Примеры решения задач по теме «Индексы»

Задача 5.1

Имеются данные о цене и физическом объеме произведенной продукции промышленного предприятия за базисный и отчетный периоды (графы 2–4 табл. 5.1).

Определить групповые и общие агрегатные индексы цен и физического объема продукции.

Решение

1. Агрегатный индекс цен рассчитывается по формуле

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

Для определения индекса цен необходимо вычислить фактическую стоимость продукции каждого вида в отчетном периоде ($p_1 q_1$) и условную стоимость продукции отчетного периода по ценам базисного ($p_0 q_1$). Результаты расчета стоимости продукции приведены в графах 5 и 6 табл. 5.1.

2. Общий агрегатный индекс цен по 6-ти изделиям

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{48\,000}{47\,500} = 1,01 \quad (101\%).$$

Цены в среднем увеличились на 1 %.

Таблица 5.1. Физический объем и цена произведенной продукции

Номер группы изделий	Номер изделия	Цена изделия, p , тыс. р.		Количество изготовленных изделий, q , шт.		Стоимость продукции в отчетном периоде (тыс. р.) по цене	
		в базисном периоде, p_0	в отчетном периоде, p_1	в базисном периоде, q_0	в отчетном периоде, q_1	базисного периода, p_0q_1	отчетного периода, p_1q_1
А	Б	1	2	3	4	5	6
I	1	16	15	800	1000	16000	15000
	2	20	20	450	500	10000	10000
	3	40	35	150	200	8000	7000
II	4	50	60	120	100	5000	6000
	5	150	180	40	50	7500	9000
	6	200	200	2	5	1000	1000
<i>Итого</i>						47500	48000
в том числе:							
группа I						34000	32000
группа II						13500	16000

3. Агрегатные индексы цен

— по группе I

$$I_p^I = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{32\ 000}{34\ 000} = 0,941 \text{ (94,1 \%)}$$

цены в среднем снизились на 5,9 %;

— по группе II

$$I_p^{II} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{16\ 000}{13\ 500} = 1,185 \text{ (118,5 \%)}$$

цены в среднем увеличились на 18,5 %.

4. Общий агрегатный индекс физического объема по 6-ти изделиям

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{47\ 500}{800 \cdot 16 + 450 \cdot 20 + \dots + 40 \cdot 150 + 2 \cdot 200} = 1,181 \text{ (118,1 \%)}.$$

Физический объем продукции (объем производства в неизменных ценах) по всем изделиям увеличился на 18,1 %.

5. Агрегатные индексы физического объема продукции
— по группе I

$$I_q^I = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{34\,000}{800 \cdot 16 + 450 \cdot 20 + 150 \cdot 40} = \frac{34\,000}{27\,800} = 1,223 \text{ (122,3 \%)}$$

физический объем продукции вырос на 22,3 %;
— по группе II

$$I_q^{II} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{13\,500}{120 \cdot 50 + 40 \cdot 150 + 2 \cdot 200} = \frac{13\,500}{12\,800} = 1,055 \text{ (105,5 \%)}$$

физический объем продукции вырос на 5,5 %.

Задача 5.2

Имеются данные о физическом объеме и цене реализованной продукции промышленного предприятия за три квартала текущего года (табл. 5.2).

Определить цепные и базисные индексы физического объема и цен реализованной продукции. Показать взаимосвязь цепных и базисных индексов.

Решение

1. Цепные индексы физического объема продукции рассчитываются по формуле агрегатного индекса с постоянными весами

$$I_{qi}^ц = \frac{\sum q_i p_0}{\sum q_{i-1} p_0}.$$

Первый цепной индекс физического объема продукции

$$I_{q1}^ц = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{120 \cdot 60 + 300 \cdot 80 + 850 \cdot 20}{100 \cdot 60 + 300 \cdot 80 + 800 \cdot 20} = \frac{48\,200}{46\,000} = 1,048 \text{ (104,8 \%)};$$

Таблица 5.2. Физический объем и цена реализованной продукции

Вид продукции	Количество реализованной продукции, шт.			Цена единицы продукции, р		
	1-й квартал q_0	2-й квартал q_1	3-й квартал q_2	1-й квартал p_0	2-й квартал p_1	3-й квартал p_2
А	100	120	150	60	58	56
Б	300	300	320	80	86	85
В	800	850	900	20	22	25

второй цепной индекс

$$I_{q2}^ц = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0} = \frac{150 \cdot 60 + 320 \cdot 80 + 900 \cdot 20}{120 \cdot 60 + 300 \cdot 80 + 850 \cdot 20} = \frac{52\,600}{48\,200} = 1,091 \text{ (109,1 \%)}.$$

2. Базисные индексы физического объема продукции определяются по формуле

$$I_{qi}^б = \frac{\sum q_i p_0}{\sum q_0 p_0}.$$

Первый базисный индекс физического объема продукции совпадает по величине с первым цепным индексом

$$I_{q1}^б = I_{q1}^ц = 1,048 \text{ (104,8 \%)};$$

второй базисный индекс

$$I_{q2}^б = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{150 \cdot 60 + 320 \cdot 80 + 900 \cdot 20}{100 \cdot 60 + 300 \cdot 80 + 800 \cdot 20} = \frac{52\,600}{46\,000} = 1,143 \text{ (114,3 \%)}.$$

Физический объем продукции во втором квартале по сравнению с первым в среднем увеличился на 4,8 %, в третьем по сравнению со вторым — на 9,1 % и в третьем по сравнению с первым — на 14,3 %.

Произведение цепных агрегатных индексов с постоянными весами равно последнему базисному индексу, т. е. для индексов физического объема продукции

$$\prod_{i=1}^n I_{qi}^ц = I_{qn}^б.$$

$$I_{q1}^ц \cdot I_{q2}^ц = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \cdot \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_1 p_0} = \frac{\sum q_2 p_0}{\sum q_0 p_0} = I_{q2}^б;$$

$$I_{q1}^ц \cdot I_{q2}^ц = 1,048 \cdot 1,091 = 1,143 = I_{q2}^б.$$

3. Цепные индексы цен рассчитываются по формуле агрегатного индекса с переменными весами

$$I_{pi}^ц = \frac{\sum p_i q_i}{\sum p_{i-1} q_i}.$$

Первый цепной индекс цен

$$I_{p1}^ц = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{58 \cdot 120 + 86 \cdot 300 + 22 \cdot 850}{60 \cdot 120 + 80 \cdot 300 + 20 \cdot 850} = \frac{51\,460}{48\,200} = 1,068 \text{ (106,8 \%)};$$

второй цепной индекс

$$I_{p2}^{\text{ц}} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2} = \frac{56 \cdot 150 + 85 \cdot 320 + 25 \cdot 900}{58 \cdot 150 + 86 \cdot 320 + 22 \cdot 900} = \frac{58\,100}{56\,020} = 1,037 \text{ (103,7 \%)}.$$

4. Базисные индексы цен определяются по формуле

$$I_{pi} = \frac{\sum p_i q_i}{\sum p_0 q_i}.$$

Первый базисный индекс цен совпадает по величине с первым цепным индексом

$$I_{p1}^{\text{ц}} = I_{p1} = 1,068 \text{ (106,8 \%)};$$

второй базисный индекс

$$I_{p2}^{\text{ц}} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_2} = \frac{56 \cdot 150 + 85 \cdot 320 + 25 \cdot 900}{60 \cdot 150 + 80 \cdot 320 + 20 \cdot 900} = \frac{58\,100}{52\,600} = 1,105 \text{ (110,5 \%)}.$$

Цены во втором квартале по сравнению с первым в среднем возросли на 6,8 %, в третьем по сравнению со вторым — на 3,7 % и в третьем по сравнению с первым — на 10,5 %.

Произведение цепных агрегатных индексов с переменными весами не равно последнему базисному индексу, т. е. для индексов цен

$$\prod_{i=1}^n I_{pi}^{\text{ц}} \neq I_{pn}^{\text{б}}.$$

$$I_{p1}^{\text{ц}} \cdot I_{p2}^{\text{ц}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2} \neq \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_0 q_2} = I_{p2}^{\text{б}};$$

$$I_{p1}^{\text{ц}} \cdot I_{p2}^{\text{ц}} = 1,068 \cdot 1,037 = 1,1075 \neq 1,105 = I_{p2}^{\text{б}}.$$

Задача 5.3

Имеются данные о физическом объеме и цене однородной продукции двух промышленных предприятий в базисном и отчетном периодах (табл. 5.3).

Определить:

- индивидуальные индексы цен;
- индексы цен переменного, постоянного (фиксированного) состава и влияния структурных сдвигов.

Решение

1. Индивидуальный индекс цены:

- по первому предприятию

Таблица 5.3. Объем и цены продукции предприятия

Номер предприятия	Количество изготовленной продукции, тыс. шт.		Цена единицы продукции, р.	
	в базисном периоде, q_0	в отчетном периоде, q_1	в базисном периоде, p_0	в отчетном периоде, p_1
1	40	20	50	45
2	40	80	60	58
Итого	80	100		

$$i_{p1} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{45}{50} = 0,9 \text{ (90 \%)};$$

— по второму предприятию

$$i_{p2} = \frac{p_1}{p_0} = \frac{58}{60} = 0,967 \text{ (96,7 \%)}.$$

Цена единицы продукции на первом предприятии снизилась на 10 %, на втором — на 3,3 %.

2. Индекс цены переменного состава

$$\begin{aligned} I_{\bar{p}} &= \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_0} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{45 \cdot 20 + 58 \cdot 80}{100} : \frac{50 \cdot 40 + 60 \cdot 40}{80} = \\ &= \frac{5540}{100} : \frac{4400}{80} = \frac{55,4}{55} = 1,0073 \text{ (100,73 \%)} . \end{aligned}$$

Средняя цена единицы продукции по двум предприятиям увеличилась на 0,73 % за счет изменения цен на отдельных предприятиях и структуры выпускаемой продукции.

3. Индекс цены постоянного состава

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{45 \cdot 20 + 58 \cdot 80}{50 \cdot 20 + 60 \cdot 80} = \frac{5540}{5800} = 0,9552 \text{ (95,52 \%)} .$$

Средняя цена единицы продукции по двум предприятиям снизилась на 4,48 % за счет изменения цен на отдельных предприятиях.

4. Индекс влияния структурных сдвигов выпускаемой продукции на среднюю цену

$$\begin{aligned} I_{p, \text{стр. сдв}} &= \frac{\sum p_0 q_1}{\sum q_1} : \frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0} = \frac{50 \cdot 20 + 60 \cdot 80}{100} : \frac{50 \cdot 40 + 60 \cdot 40}{80} = \\ &= \frac{5800}{100} : \frac{4400}{80} = \frac{58}{55} = 1,0545 \text{ (105,45 \%)} . \end{aligned}$$

За счет изменения структуры продукции на предприятиях средняя цена изделия возросла на 5,45 % .

5. Индексы цены переменного, постоянного состава и структурных сдвигов связаны следующим соотношением:

$$I_{\bar{p}} = I_p \cdot I_{p, \text{стр.сдв}} = 0,9552 \cdot 1,0545 = 1,0073 \quad (100,73 \%).$$

Задача 5.4

Имеются данные о себестоимости и объемах выпуска продукции (табл. 5.4).

Определить по изделию А и по всей сопоставимой продукции:

- индексы себестоимости: плановый, выполнения плана, фактический;
- изменение себестоимости единицы продукции: плановое, сверхплановое, фактическое;
- экономию (перерасход) затрат на весь объем выпуска продукции: плановую, сверхплановую, фактическую.

Решение

1. Индивидуальные индексы себестоимости по изделию А:

— плановый

$$i_{\text{пл}} = \frac{z_{\text{пл}}}{z_0} = \frac{95}{100} = 0,95;$$

— выполнения плана

$$i_{\text{в.пл}} = \frac{z_1}{z_{\text{пл}}} = \frac{112}{95} = 1,179;$$

— фактический

$$i_{\text{ф}} = \frac{z_1}{z_0} = \frac{112}{100} = 1,12.$$

Таблица 5.4. Себестоимость и объемы выпуска продукции

Вид продукции	Базисный период	Отчетный период			
		планируемые показатели		фактические показатели	
	Себестоимость единицы продукции, $z_0, \text{ р.}$	Объем выпуска продукции, $q_{\text{пл}}, \text{ тыс. шт.}$	Себестоимость единицы продукции, $z_{\text{пл}}, \text{ р.}$	Объем выпуска продукции, $q_1, \text{ тыс. шт.}$	Себестоимость единицы продукции, $z_1, \text{ р.}$
А	100	30	195	20	112
Б	—	40	150	50	140
В	120	—	—	—	—

Индивидуальные индексы фактический, плановый и выполнения плана связаны следующим соотношением:

$$i_{\phi} = i_{\text{пл}} \cdot i_{\text{в.пл}} = \frac{z_{\text{пл}}}{z_0} \cdot \frac{z_1}{z_{\text{пл}}} = 0,95 \cdot 1,179 = 1,12.$$

Абсолютное изменение себестоимости единицы продукции:

— по плану

$$\Delta z_{\text{пл}} = z_{\text{пл}} - z_0 = 95 - 100 = -5 \text{ р.};$$

— сверхплановое

$$\Delta z_{\text{сп}} = z_1 - z_{\text{пл}} = 112 - 95 = +17 \text{ р.};$$

— фактическое

$$\Delta z_{\phi} = z_1 - z_0 = 112 - 100 = +12 \text{ р.};$$

$$\Delta z_{\phi} = \Delta z_{\text{пл}} + \Delta z_{\text{сп}} = -5 + 17 = +12 \text{ р.};$$

Экономия (перерасход) затрат на весь выпуск продукции от изменения себестоимости единицы продукции определяется следующим образом:

— плановая экономия

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{пл}} = (z_{\text{пл}} - z_0) \cdot q_{\text{пл}} = (95 - 100) \cdot 30 = -150 \text{ тыс. р.};$$

— сверхплановый перерасход

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{сп}} = (z_1 - z_{\text{пл}}) \cdot q_1 = (112 - 95) \cdot 20 = +340 \text{ тыс. р.};$$

— фактический перерасход

$$\Delta \mathcal{E}_{\phi} = (z_1 - z_0) \cdot q_1 = (112 - 100) \cdot 20 = +240 \text{ тыс. р.}$$

Планом предусмотрено снизить затраты на 150 тыс. р., фактически по сравнению с планом имеется перерасход затрат в 340 тыс. р., по сравнению с базисным периодом фактические затраты в отчетном периоде увеличились на 240 тыс. р.

2. При вычислении планового и фактического индексов себестоимости по всем видам изделий сопоставимой продукцией является только изделие А, при вычислении индекса выполнения плана – изделия А и Б.

Индексы себестоимости:

— плановый (планового задания)

$$I_{\text{пл}} = \frac{\sum z_{\text{пл}} q_{\text{пл}}}{\sum z_0 q_{\text{пл}}} = \frac{95 \cdot 30}{100 \cdot 30} = \frac{2850}{3000} = 0,95;$$

— выполнения плана

$$I_{\text{в.пл}} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_{\text{пл}} q_1} = \frac{112 \cdot 20 + 140 \cdot 50}{95 \cdot 20 + 150 \cdot 50} = \frac{9240}{9400} = 0,983;$$

— фактический

$$I_{\Phi} = \frac{\sum z_1 q_1}{\sum z_0 q_1} = \frac{112 \cdot 20}{100 \cdot 20} = \frac{2240}{2000} = 1,12.$$

Планом предусмотрено снижение средней себестоимости изделия на 5 %, плановое задание по себестоимости перевыполнено на 1,7 % ($98,3 - 100 = -1,7$), т. е. средняя фактическая себестоимость изделий А и Б оказалась меньше плановой на 1,7 %, фактическая себестоимость увеличилась по сравнению с базисным периодом на 12 %.

Размер экономии (перерасхода) затрат на весь выпуск продукции от изменения себестоимости определяется следующим образом:

— плановая экономия затрат

$$\partial_{\text{пл}} = \sum z_{\text{пл}} q_{\text{пл}} - \sum z_0 q_{\text{пл}} = 2850 - 3000 = -150 \text{ тыс. р.};$$

— сверхплановая экономия затрат

$$\partial_{\text{сп}} = \sum z_1 q_1 - \sum z_{\text{пл}} q_1 = 9240 - 9400 = -160 \text{ тыс. р.};$$

— фактический перерасход затрат

$$\partial_{\Phi} = \sum z_1 q_1 - \sum z_0 q_1 = 2240 - 2000 = +240 \text{ тыс. р.}$$

Задача 5.5

Имеются данные об индивидуальных индексах цен и стоимости пяти видов изделий в отчетном периоде (табл. 5.5).

Определить общий индекс цен.

Решение

Для определения общего индекса цен не удастся воспользоваться формулой агрегатного индекса

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1},$$

Таблица 5.5. Индивидуальные индексы цен и стоимость изделий

Вид изделия	Индекс цены, i_p	Стоимость продукции, произведенной в отчетном периоде, $p_1 q_1$, млн р.
А	0,98	20
Б	1,04	30
В	0,95	40
Г	0,99	10
Д	1,12	80
Итого		180

так как отсутствует информация о ценах и физических объемах продукции в базисном и отчетном периодах.

При замене в агрегатном индексе цены базисного периода

$$P_0 = \frac{P_1}{i_p} \quad (\text{из индивидуального индекса цены } i_p = \frac{P_1}{P_0})$$

получается формула среднего гармонического индекса цены

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{\sum P_1 q_1}{\sum P_0 q_1} = \frac{\sum P_1 q_1}{\sum \frac{1}{i_p} P_1 q_1} = \frac{\sum Q_1}{\sum \frac{1}{i_p} Q_1} = \frac{180}{\frac{20}{0,98} + \frac{30}{1,04} + \frac{40}{0,95} + \frac{10}{0,99} + \frac{80}{1,12}} = \\ &= \frac{180}{20,41 + 28,85 + 42,11 + 10,10 + 71,43} = \frac{180}{172,9} = 1,041. \end{aligned}$$

Цены в среднем увеличились на 4,1 %.

Задача 5.6

Имеются данные об индивидуальных индексах физического объема продукции и стоимости четырех видов изделий в базисном периоде (табл. 5.6).

Определить общий индекс физического объема продукции.

Решение

При использовании агрегатного индекса

$$I_q = \frac{\sum q_1 P_0}{\sum q_0 P_0}$$

для расчета общего индекса физического объема продукции необходима информация о ценах и физических объемах продукции.

Таблица 5.6. Индивидуальные индексы физического объема и стоимость изделий

Номер изделия	Индекс физического объема продукции, i_p	Стоимость продукции, произведенной в базисном периоде, $P_0 q_0$, млн р.
1	1,47	20
2	1,55	30
3	1,71	25
4	2,10	15
Итого		90

При замене в агрегатном индексе физического объема отчетного периода $q_1 = i_q q_0$ (из индивидуального индекса физического объема $i_q = \frac{q_1}{q_0}$) получается формула среднего арифметического индекса физического объема продукции

$$I_q = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum i_q q_0 p_0}{\sum q_0 p_0} = \frac{\sum i_q Q_0}{\sum Q_0} = \frac{1,47 \cdot 20 + 1,55 \cdot 30 + 1,71 \cdot 25 + 2,1 \cdot 15}{20 + 30 + 25 + 15} = \frac{150,15}{90} = 1,667 \text{ (166,7\%)}$$

Физический объем продукции по четырем изделиям увеличился на 66,7%.

Задача 5.7

Имеются данные о трудоемкости изготовления единицы продукции и удельном весе затрат труда (графы 1–3 табл. 5.7).

Определить общий индекс производительности труда.

Решение

Трудоемкость является обратным показателем производительности труда, поэтому агрегатный индекс производительности труда

$$I_{п.т} = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1}$$

Так как отсутствует информация о физических объемах продукции в отчетном периоде, необходимо осуществить замену в агрегатном индексе производительности труда трудоемкости в базисном

Таблица 5.7. Трудоемкость и удельный вес затрат труда

Вид продукции	Трудоемкость изготовления единицы продукции, чел.-ч.		Удельный вес затрат труда на производство продукции в отчетном периоде, d_1 , %	Индивидуальный индекс производительности труда, $i_{п.т}$
	в базисном периоде, t_0	в отчетном периоде, t_1		
А	1	2	3	4
1	5,94	5,40	30	1,10
2	7,98	7,60	50	1,05
3	3,00	3,00	20	1,00
Итого	–	–	100	–

периоде $t_0 = i_{п.т} t_1$ (из индивидуального индекса производительности труда $i_{п.т} = \frac{t_0}{t_1}$).

Средний арифметический индекс производительности труда имеет следующий вид

$$I_{п.т} = \frac{\sum t_0 q_1}{\sum t_1 q_1} = \frac{\sum i_{п.т} t_1 q_1}{\sum t_1 q_1} = \frac{\sum i_{п.т} T_1}{\sum T_1}.$$

Результаты расчета индивидуальных индексов производительности труда по трем видам изделий приведены в графе 4 табл. 5.7.

Общий агрегатный индекс производительности труда может быть вычислен с использованием удельного веса затрат труда по каждому виду продукции в отчетном периоде (d_1)

$$I_{п.т} = \frac{\sum i_{п.т} T_1}{\sum T_1} = \frac{\sum i_{п.т} d_1}{\sum d_1} = \frac{1,1 \cdot 30 + 1,05 \cdot 50 + 1 \cdot 20}{100} = 1,055 \text{ (105,5 \%)}.$$

Производительность труда увеличилась в отчетном периоде по сравнению с базисным на 5,5 %.

Задача 5.8

В отчетном периоде физический объем сопоставимой продукции вырос на 5 %, а объем реализованной продукции увеличился на 10 %.

Определить изменение средней цены единицы продукции.

Решение

Индексы цены (I_p), физического объема (I_q) и стоимости продукции (I_Q) связаны следующим соотношением

$$I_Q = I_p \cdot I_q.$$

Из условия задачи

$$I_q = 1 + 0,05 = 1,05; \quad I_Q = 1 + 0,10 = 1,1.$$

Индекс цены

$$I_p = \frac{I_Q}{I_q} = \frac{1,1}{1,05} = 1,0476 \text{ или } 104,76 \text{ \%}.$$

В среднем цена единицы продукции увеличилась на 4,76 %.

Задача 5.9

В отчетном периоде производственные затраты увеличились на 12 %, себестоимость единицы продукции снизилась в среднем на 6 %.

Определить индекс физического объема продукции.

Решение

Индексы производственных затрат (I_z), себестоимости единицы продукции (I_z) и физического объема продукции (I_q) связаны следующим соотношением

$$I_z = I_z \cdot I_q.$$

Из условия задачи

$$I_z = 1 + 0,12 = 1,12; \quad I_z = 1 - 0,06 = 0,94.$$

Индекс физического объема продукции

$$I_q = \frac{I_z}{I_z} = \frac{1,12}{0,94} = 1,1915 \text{ или } 119,15 \%.$$

Физический объем продукции увеличился на 19,15 %.

Задача 5.10

В отчетном периоде по сравнению с базисным выпуск продукции увеличился в 1,2 раза, объем затрат на производство продукции возрос на 14 %.

Определить индекс затрат на рубль товарной продукции.

Решение

Затраты на рубль продукции показывают величину затрат на производство продукции (Z) приходящуюся на один рубль стоимости продукции (Q)

$$z = \frac{Z}{Q}.$$

Индексы производственных затрат (I_z), затрат на рубль продукции (I_z) и стоимости продукции (I_Q) связаны следующим соотношением

$$I_z = I_z \cdot I_Q.$$

Из условия задачи

$$I_Q = 1,2; \quad I_z = 1 + 0,14 = 1,14.$$

Индекс затрат на рубль товарной продукции

$$I_z = \frac{I_z}{I_Q} = \frac{1,2}{1,14} = 1,053 \text{ или } 105,3\%.$$

Затраты на рубль товарной продукции увеличились на 5,3%.

Задача 5.11

Индекс средней месячной производительности труда рабочих равен 105 %, индекс средней фактической продолжительности рабоче-

го периода в днях равен 110 % ; индекс средней фактической продолжительности рабочего дня равен 98 % .

Определить индекс средней часовой производительности труда рабочих.

Решение

Средняя месячная производительность труда рабочих (V_M) зависит от средней часовой производительности труда рабочих ($V_ч$), средней фактической продолжительности рабочего дня (t) и средней фактической продолжительности рабочего периода в днях (T)

$$V_M = V_ч \cdot t \cdot T.$$

Индексная система

$$I_{V_M} = I_{V_ч} \cdot I_t \cdot I_T.$$

Из условия задачи

$$I_{V_M} = 1,05; I_t = 0,98; I_T = 1,1.$$

Индекс средней часовой производительности труда рабочих

$$I_{V_ч} = \frac{I_{V_M}}{I_t \cdot I_T} = \frac{1,05}{0,98 \cdot 1,1} = 0,974 \text{ (97,4\%)}.$$

Средняя часовая производительность труда рабочих снизилась на 2,6 % .

Рекомендуемая литература

1. *Теория статистики: Учебник* / Под ред. Г. Л. Громыко. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2005. 476 с.
2. *Теория статистики: Учебник* / Под ред. Р. А. Шмойловой. Изд. 4-е перер. М.: Финансы и статистика, 2003. 560 с.
3. *Ефимова М. Р., Петрова Е. В., Румянцев В. Н.* Общая теория статистики: Учебник. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ИНФРА-М, 2002. 416 с.
4. *Елисеева И. И., Юзбашев М. М.* Общая теория статистики: учебник / Под ред. И. И. Елисеевой. Изд. 4-е. М.: Финансы и статистика, 2002. 480 с.
5. *Статистика: учебник.* / Под ред. И. И. Елисеевой. М.: ООО «ВИТ РЭМ», 2002. 448 с.
6. *Сиденко А. В., Попов Г. Ю., Матвеева В. М.* Статистика: учебник. М.: Изд-во «Дело и Сервис», 2000. 464 с.
7. *Практикум по теории статистики: учеб. пособие* / Под ред. Р. А. Шмойловой. М.: Финансы и статистика, 2004. 416 с.
8. *Теория статистики. учеб. пособие для вузов* / И. И. Елисеева, В. С. Киязеская и др.; Под ред. И. И. Елисеевой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 446с.
9. *Громыко Г.Л.* Общая теория статистики: Практикум. М.: ИНФРА-М, 1999. 139 с.
10. *Статистика: учеб. пособие* / Под ред. М. Р. Ефимовой. М.: ИНФРА-М, 2002. 336 с.
11. *Гусаров В. М.* Статистика: учеб. пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 463 с.
12. *Октябрьский П. Я.* Статистика: учеб. пособие. 2-е изд. испр. и доп. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2001. 344 с.
13. *Практикум по социальной статистике: учеб. пособие* / Под ред. И. И. Елисеевой. 2-е изд., перераб. М.: Финансы и статистика, 2004. 368 с.
14. *Богородская Н. А.* Экономическая статистика: текст лекций / СПбГААП. СПб., 1995. 111 с.
15. *Богородская Н. А.* Статистика. Методы анализа статистической информации: текст лекций / СПбГААП. СПб., 1997. 80 с.
16. *Богородская Н. А.* Статистика национального богатства: учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 1999. 84 с.
17. *Богородская Н. А.* Статистика труда: учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 1999. 109 с.
18. *Богородская Н. А.* Статистика. Результаты экономической деятельности: учеб. пособие / СПбГУАП. СПб., 2001. 113 с.
19. *Россия в цифрах, 2002: крат. стат. сб./* Госкомстат России. М., 2002. 398 с.
20. *Российский статистический ежегодник. 2004.*
21. *Россия в цифрах, 2006: Крат.стат.сб./* Росстат - М., 2006. - 462 с.
22. *Регионы России: Экономическая конъюнктура (Социально-экономическая информация). Т. 1. Шестнадцатый выпуск. М.: Центр экономической конъюнктуры при Правительстве Российской Федерации. 2004. 351 с.*

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ	4
1.1. Методические указания к решению задач по теме «Относительные показатели»	4
1.2. Примеры решения задач по теме «Относительные показатели»	9
2. СРЕДНИЕ ПОКАЗАТЕЛИ	35
2.1. Методические указания к решению задач по теме «Средние показатели»	35
2.2. Примеры решения задач по теме «Средние показатели»	41
3. ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАЦИИ	55
3.1. Методические указания к решению задач по теме «Показатели вариации»	55
3.2. Примеры решения задач по теме «Показатели вариации»	61
4. ПОКАЗАТЕЛИ РЯДОВ ДИНАМИКИ	70
4.1. Методические указания к решению задач по теме «Показатели рядов динамики»	70
4.2. Примеры решения задач по теме «Показатели рядов динамики»	75
5. ИНДЕКСЫ	81
5.1. Методические указания к решению задач по теме «Индексы»	81
5.2. Примеры решения задач по теме «Индексы»	81
Рекомендуемая литература	101